Ganzrationale Funktionen: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ mit $a_i, x\in R$ und $n\in N$

Eigenschaften:

- Definitionsbereich $D_f=R$
- Im gesamten Definitionsbereich stetig.
- Funktion n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Nullstellen allgemein: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

1) Grad $n=1$ → $f(x)=a_1x+a_0$ → Lineare Funktionen $f(x)=mx+n$

m – Anstieg n – Absolutglied

für $m\neq 0$ genau eine Nullstelle $x_0=-\frac{n}{m}$

für $m=0$ und $n\neq 0$ → $f(x)=n$ → keine Nullstelle

für $m=0$ und $n=0$ → $f(x)=0$ → unendlich viele Nullstellen

2) Grad $n=2$ → $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ → Quadratische Funktionen

allgemeine Form: $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ → **Division durch** a_2 **!**

Normalform: $x^2+px+q=0$

→ 1. Lösungsweg: **Lösungsformel** $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

→ 2. Lösungsweg: **Satz des VIETA** $x_{01}\cdot x_{02}=q$ **und** $x_{01}+x_{02}=-p$

(geeignet, wenn p und q ganze Zahlen sind)

Bsp. 1) $3x^2+9x-54=0$ $|:3$ Normalform erzeugen

$x^2+3x-18=0$ → Lösungsformel: $x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{72}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{9}{2}$ → $\underline{\underline{x_1=3}}$ $\underline{\underline{x_2=-6}}$

Satz des VIETA: $\underline{\underline{x_1=3}}$ $\underline{\underline{x_2=-6}}$, da $3-6=-3$ und $3\cdot(-6)=-18$

Bsp. 2) $-6x^2-5x+6=0$ $|:(-6)$ Normalform erzeugen

$x^2+\frac{5}{6}x-1=0$ → Lösungsformel: $x_{1,2}=-\frac{5}{12}\pm\sqrt{\frac{25}{144}+\frac{144}{144}}=-\frac{5}{12}\pm\frac{13}{12}$ → $\underline{\underline{x_1=\frac{2}{3}}}$ $\underline{\underline{x_2=-\frac{3}{2}}}$

für $\frac{p^2}{4}>q$ zwei reelle Nullstellen

für $\frac{p^2}{4}=q$ eine reelle Nullstelle

für $\frac{p^2}{4}<q$ keine reelle Nullstelle

3) Grad $n=3$ → $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ → Funktionen dritten Grades

Für Gleichungen dritten Grades gibt es zwar eine Lösungsformel, diese ist aber sehr umfangreich!
Wir lösen hier nur solche Gleichungen schriftlich, die nur ganzzahlige Koeffizienten a_i besitzen.

Bsp.) $x^3-7x-6=0$

1. Schritt: Finden einer Nullstelle durch systematisches Probieren
→ geeignet sind nur ganzzahlige Teiler des Absolutgliedes (hier: -6)
→ also: 1, (-1), 2, (-2), 3, (-3), 6, (-6)
→ es ist $(-1)^3-7(-1)-6=0$ → -1 ist eine Nullstelle → $\underline{\underline{x_{01}=-1}}$

2. Schritt: Teilen des Ausgangspolynoms durch $(x-\text{gefundene Nullstelle})$
Dieses Verfahren nennt man auch **Polynomdivision**.
(Beide Polynome müssen von der größten zur kleinsten Potenz von x sortiert sein!)

→ $(x^3-7x-6):(x+1)=x^2-x-6$ da $x^3:x=x^2$

$\underline{-(x^3+x^2)}$ da $x^2\cdot(x+1)=x^3+x^2$

$-x^2-7x-6$ da $(x^3-7x-6)-(x^3+x^2)=-x^2-7x-6$

$\underline{-(-x^2-x)}$ da $-x\cdot(x+1)=-x^2-x$

$-6x-6$ da $\underline{-x^2-7x-6-(-x^2-x)=-6x-6}$

$\underline{-(-6x-6)}$ da $-6\cdot(x+1)=-6x-6$

0 da $\underline{-6x-6-(-6x-6)=0}$

3. Schritt: Restpolynom 0 setzen und quadratische Gleichung lösen

→ $x^2 - x - 6 = 0$ → $\underline{\underline{x_{02} = 3}}$ $\underline{\underline{x_{03} = -2}}$

Damit hat die Funktion $f(x) = x^3 - 7x - 6$ die Nullstellen $\underline{\underline{x_{01} = -1}}$ $\underline{\underline{x_{02} = 3}}$ $\underline{\underline{x_{03} = -2}}$

→ Es gilt: $f(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

Verallgemeinerung:

Sind x_{01}, x_{02}, x_{03} ... x_{0n} die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, so gilt:
$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_{01})\cdot(x - x_{02})\cdot(x - x_{03})\cdot ... \cdot(x - x_{0n})$

Die Faktoren $(x - x_{01})$, $(x - x_{02})$, $(x - x_{03})...(x - x_{0n})$ nennt man **Linearfaktoren**.
(x kommt in jedem Faktor nur linear vor.)

4) Grad $n > 3$ → **Funktionen höheren Grades**

Zur Lösung von Gleichungen höheren Grades kann man wie folgt vorgehen:

1. Finden einer Nullstelle durch „Systematisches Probieren“ (ganzzahlige Teiler von a_0) → x_{01}
2. Polynomdivision (Teilen durch $(x - x_{01})$) → Restpolynom $n-1$. Grades
3. Restpolynom 0 setzen und lösen. (Wiederholung der Schritte 1 und 2)
   Irgendwann ist Restpolynom nur noch quadratisch und kann mit Lösungsformel gelöst werden.

Lösungsverfahren für spezielle Gleichungen höheren Grades:

1) Faktorzerlegung (Ausklammern der kleinsten Potenz von x)

Bsp.) $2x^4 + 7x^3 - 4x^2 = 0$ → Ausklammern von $2x^2$

$2x^2 \cdot (x^2 + \frac{7}{2}x - 2) = 0$ → Ein Produkt ist 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist.

→ $2x^2 = 0$ oder $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$ → $\underline{\underline{x_{01} = 0}}$ oder $\underline{\underline{x_{02} = \frac{1}{2}}}$ $\underline{\underline{x_{03} = -4}}$

2) Substitutionsverfahren

Geeignet, wenn alle Exponenten von x einen größten gemeinsamen Teiler größer als 1 haben.

Bsp. 1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ → Substitution: $x^2 = z$ → $z^2 - 13z + 36 = 0$ → $\underline{z_{01} = 4}$ $\underline{z_{02} = 9}$

Rücksubstitution: $x^2 = 4$ → $\underline{\underline{x_{01} = 2}}$ $\underline{\underline{x_{02} = -2}}$

oder $x^2 = 9$ → $\underline{\underline{x_{03} = 3}}$ $\underline{\underline{x_{04} = -3}}$

Bsp. 2) $x^6 + 5x^3 + 4 = 0$ → Substitution: $x^3 = z$ → $z^2 + 5z + 4 = 0$ → $\underline{z_{01} = -4}$ $\underline{z_{02} = -1}$

Rücksubstitution: $x^3 = -4$ → $\underline{\underline{x_{01} = \sqrt[3]{-4} \approx -1{,}5874}}$

oder $x^3 = -1$ → $\underline{\underline{x_{02} = -1}}$