Beispiel.: Gebrochenrationale Funktion $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

→ Definitionsbereich: $D_f = R\setminus\{-1;1\}$

→ An den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ existieren keine Funktionswerte

→ Wie verhalten sich die Funktionswerte in der Umgebung von $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$???

1. Untersuchung der Funktionswerte in der Umgebung von $x_1 = 1$

links von 1 → $x<1$	rechts von 1 → $x>1$
$f(0{,}9)=2{,}05$	$f(1{,}1)=1{,}95$
$f(0{,}99)=2{,}005$	$f(1{,}01)=1{,}995$
$f(0{,}999)=2{,}0005$	$f(1{,}001)=1{,}9995$

→ Je näher die x-Werte bei $x=1$ liegen, um so näher liegen die Funktionswerte bei $f(x)=2$
Diesen Funktionswert nennt man **Grenzwert der Funktion an der Stelle** $x=1$.

Definition 1: Für den Grenzwert einer Funktion f(x) an der Stelle $x=a$ schreibt man $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
(gespochen: Limes (Grenzwert) von f(x) für x gegen a)

Für unser Beispiel können wir also schreiben: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=2$

2. Untersuchung der Funktionswerte in der Umgebung von $x_2 = -1$

links von -1 → $x<-1$	rechts von -1 → $x>-1$
$f(-1{,}1)=-19$	$f(-0{,}9)=21$
$f(-1{,}01)=-199$	$f(-0{,}99)=201$
$f(-1{,}001)=-1999$	$f(-0{,}999)=2001$

→ Nähern sich die x-Werte von links dem Wert $x=-1$, um so kleiner werden die Funktionswerte. Diesen Funktionswert nennt man **linksseitigen Grenzwert der Funktion an der Stelle** $x=-1$.

→ Nähern sich die x-Werte von rechts dem Wert $x=-1$, um so größer werden die Funktionswerte. Diesen Funktionswert nennt man **rechtsseitigen Grenzwert der Funktion an der Stelle** $x=-1$.

Definition 2: Für den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert einer Funktion f(x) an der Stelle $x=a$ schreibt man $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$.

Für unser Beispiel können wir also schreiben: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=-\infty$ bzw. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\infty$

Da "$-\infty$" und "∞" keine Werte sind, mit denen man rechnen kann, nennt man sie uneigentliche Werte.

Definition 3: Die Grenzwerte "$-\infty$" und "∞" nennt man **uneigentliche Grenzwerte.**

Definition 4: Stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion f(x) an der Stelle $x=a$ überein, so spricht man nur vom Grenzwert der Funktion f(x) an der Stelle $x=a$.

Also: Wenn $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ → $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Berechnung von Grenzwerten

Grenzwertsätze:

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to a} \left(k \cdot f(x)\right) = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ mit $k \in R$

4. $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. a) $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \bullet g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \bullet \lim\limits_{x\to a} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x\to -2} (2x^2 - 3x + 4) = \underline{\underline{18}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x+1}{1-2x} = \underline{\underline{-\frac{7}{3}}}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = \underline{\underline{\infty}}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = \underline{\underline{-\infty}}$

Problem: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$?!

Satz: Führt die Berechnung des Grenzwertes einer Funktion f(x) an der Stelle $x = a$ auf einen unbestimmten Ausdruck der Form "0**:**0", so gilt:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)\cdot u_R(x)}{(x-a)\cdot v_R(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{u_R(x)}{v_R(x)}$; mit $(x-a)$ Linearfaktor und $u_R(x)$ und $v_R(x)$ Restpolynome

→ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x+2)\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x-3}{x-1} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

Verhalten im Unendlichen:

→ Ausklammern der höchsten Potenz im Zähler und Nenner:

Bsp. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{5x^2+4x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$

Bsp. 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{7x^2-5x+4}{x^3-2x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(7-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\left(7-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \underline{\underline{0}}$

Bsp. 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5x^4+2x^2+4}{x^3-2x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4\left(5+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x\cdot\left(5+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \underline{\underline{-\infty}}$