1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

a) Definitionsbereich: $D_f=R\setminus\{-1\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;1)$, kein S_x

c) Unstetigkeitsstellen:

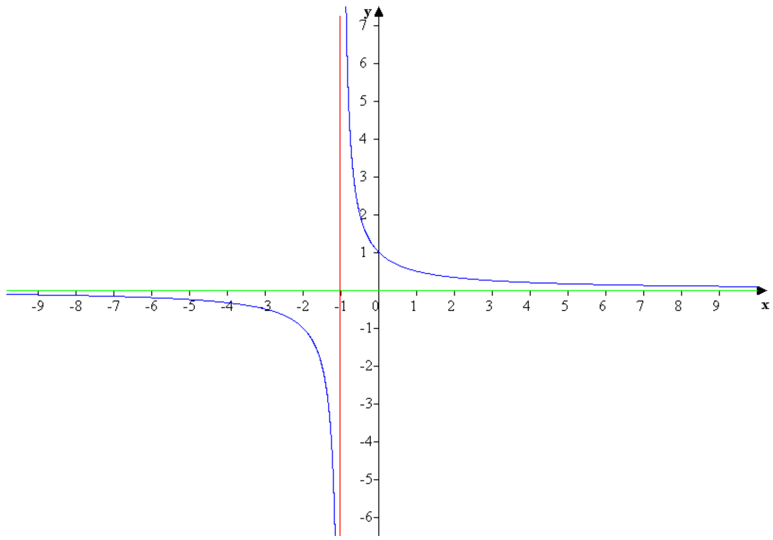
Pol bei $x=-1$ → $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{1}{1+x}=-\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{1}{1+x}=\infty$ keine Lücken

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$

Asymptote: $y_A=0$

e) Funktionsgraph:



2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-2}$

a) Definitionsbereich: $D_f=R\setminus\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;-1)$, kein S_x

c) Unstetigkeitsstellen:

Pole: $x_1=-\sqrt{2}$ → $\lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{2}\\x<-\sqrt{2}}}\dfrac{2}{x^2-2}=\underline{\infty}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{2}\\x>-\sqrt{2}}}\dfrac{2}{x^2-2}=\underline{-\infty}$

$x_2=\sqrt{2}$ → $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\x<\sqrt{2}}}\dfrac{2}{x^2-2}=\underline{-\infty}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\x>\sqrt{2}}}\dfrac{2}{x^2-2}=\underline{\infty}$

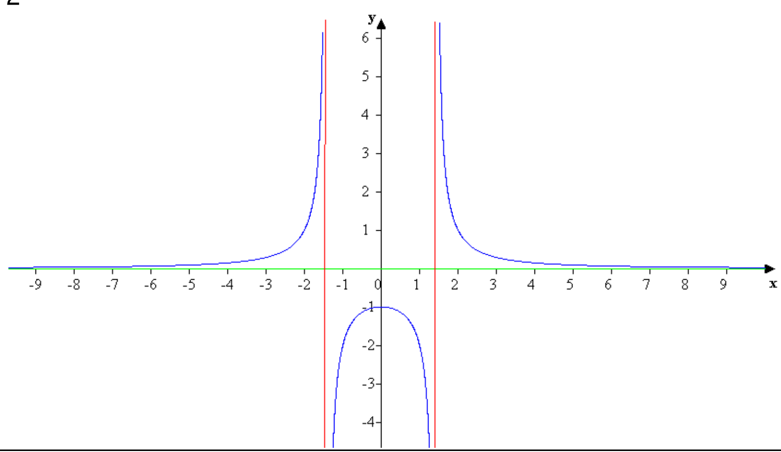
keine Lücken

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x^2-2}=0$

Asymptote: $y_A=0$

e) Funktionsgraph:



3) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

a) Definitionsbereich: $D_f = R \setminus \{3\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;-1)$, $S_x(-3;0)$

c) Unstetigkeitsstellen:

Pol bei $x = 3$ → $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{x+3}{x-3} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{x+3}{x-3} = \infty$

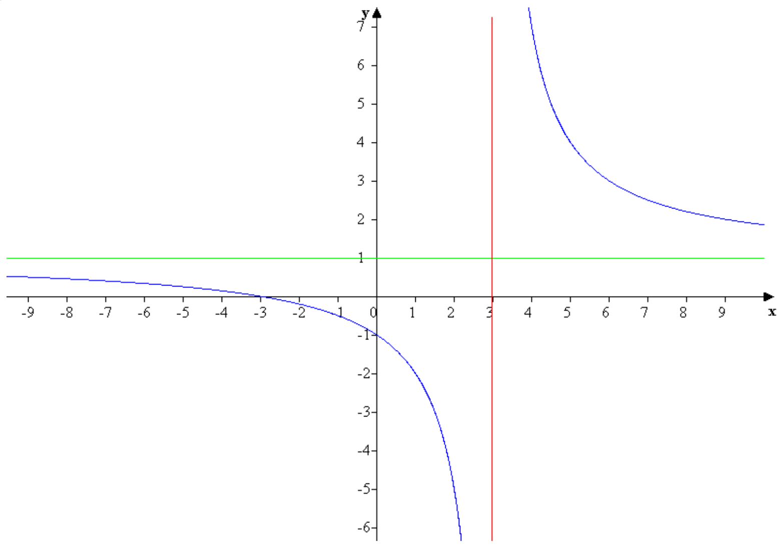
keine Lücken

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+3}{x-3} = 1$

Asymptote: $y_A = 1$

e) Funktionsgraph:



4) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-3x-4} = \dfrac{x-4}{(x-4)\cdot(x+1)}$

a) Definitionsbereich: $D_f = R \setminus \{-1; 4\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;1)$, kein S_x

c) Unstetigkeitsstellen:

Pol: $x = -1$ → $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{1}{x+1} = \infty$

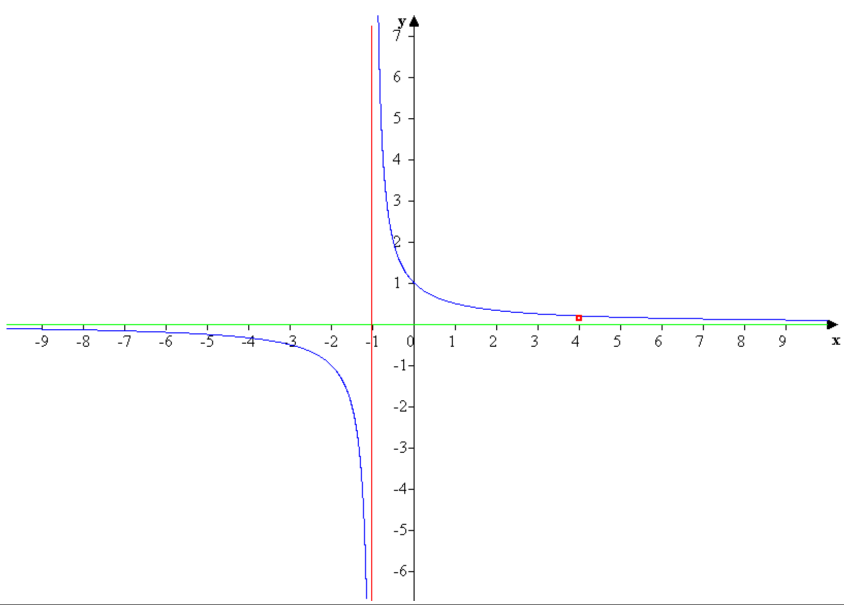
Lücke: $x = 4$ → $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x+1} = 0{,}2$

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

Asymptote: $y_A = 0$

e) Funktionsgraph:



5) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$

a) Definitionsbereich: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;\frac{1}{2})$, $S_{x1}(-\sqrt{\frac{1}{2}};0)$, $S_{x1}(\sqrt{\frac{1}{2}};0)$

c) Unstetigkeitsstellen:

- Pole: $x_1=-\sqrt{2}$ $x_2=\sqrt{2}$

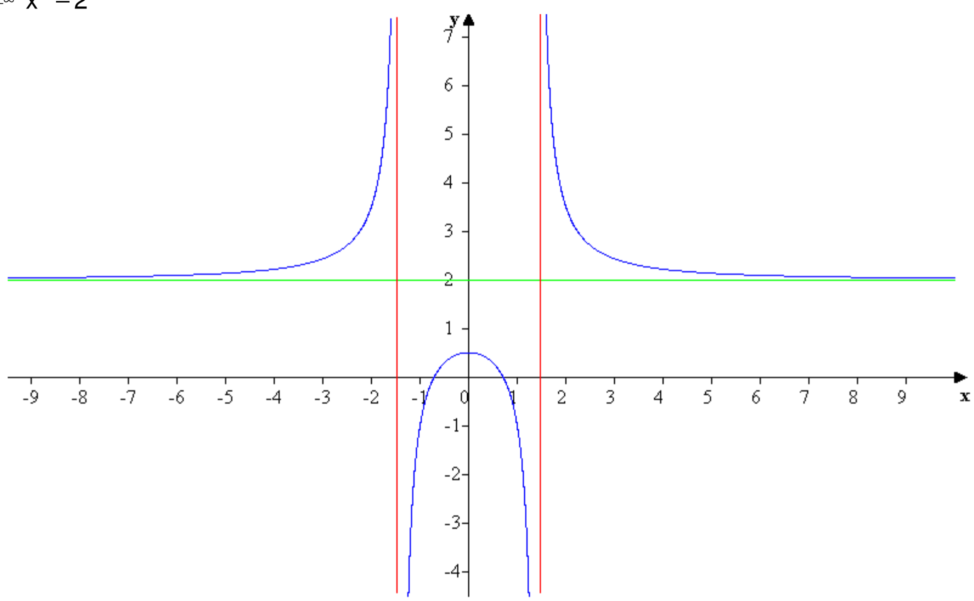
$\lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{2}\\x<-\sqrt{2}}}\dfrac{3x^2-12}{2x^2-4}=\underline{\infty}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{2}\\x>-\sqrt{2}}}\dfrac{3x^2-12}{2x^2-4}=\underline{-\infty}$ bzw. $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\x<\sqrt{2}}}\dfrac{3x^2-12}{2x^2-4}=\underline{-\infty}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\x>\sqrt{2}}}\dfrac{3x^2-12}{2x^2-4}=\underline{\infty}$

- keine Lücken

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2-2}=2$ Asymptote: $y_A=2$

e) Funktionsgraph:



6) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

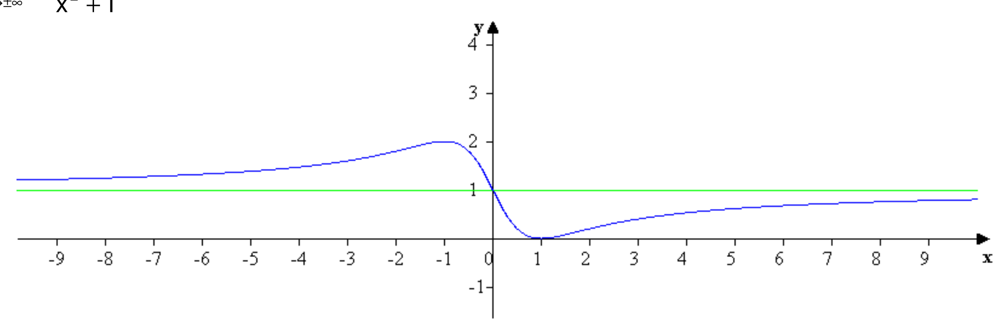
a) Definitionsbereich: $D_f=\mathbb{R}$ b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;1)$, $S_x(1;0)$

c) Unstetigkeitsstellen: keine

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=1$ Asymptote: $y_A=1$

e) Funktionsgraph:



7) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}=\dfrac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-1)}$

a) Definitionsbereich: $D_f=R\setminus\{-2;\,1\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;2)$, $S_x(2;0)$

c) Unstetigkeitsstellen:

Pol: $x=1$ → $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x-2}{x-1}=\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$

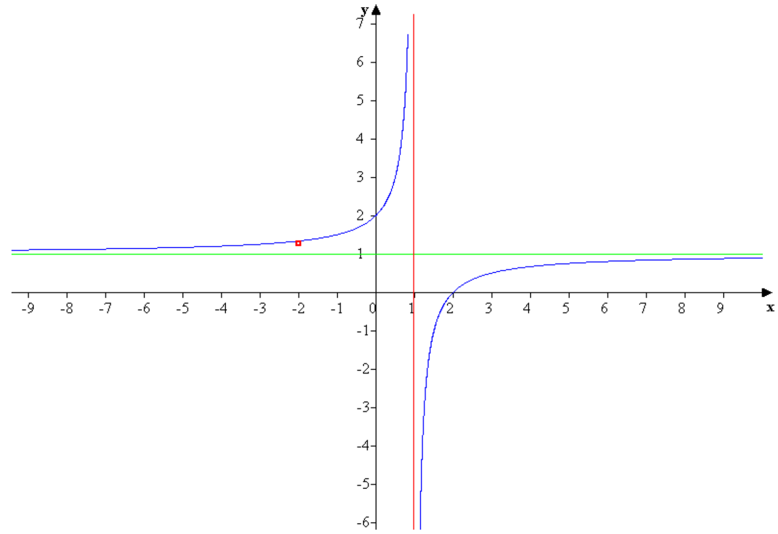
Lücke: $x=-2$ → $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4}{3}$

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x-1}=1$

Asymptote: $y_A=1$

e) Funktionsgraph:



8) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4}{(x-2)\cdot(2x-1)\cdot(x^2+1)}=\dfrac{(x-2)^2\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(2x-1)\cdot(x^2+1)}$

a) Definitionsbereich: $D_f=R\setminus\{\tfrac{1}{2};\,2\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;2)$, $S_x(-1;0)$

c) Unstetigkeitsstellen:

Pol: $x=\tfrac{1}{2}$ → $\lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x<0{,}5}}\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{(2x-1)\cdot(x^2+1)}=\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x>0{,}5}}\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{(2x-1)\cdot(x^2+1)}=-\infty$

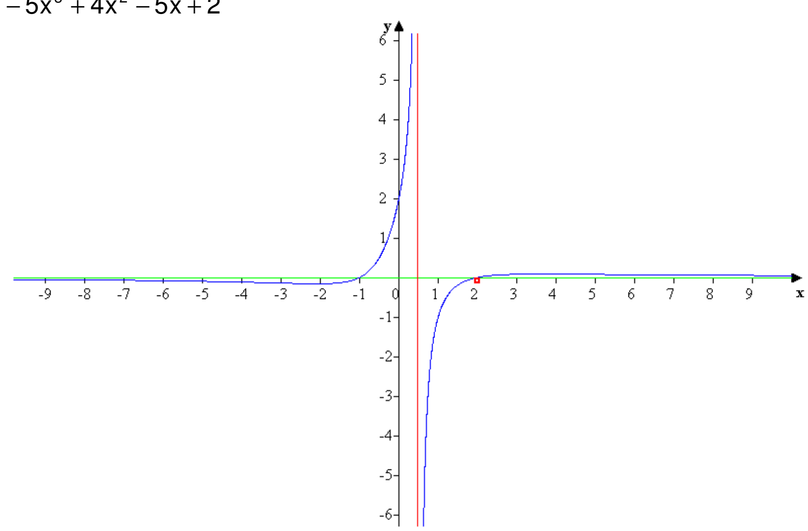
Lücke: $x=2$ → $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{(2x-1)\cdot(x^2+1)}=0$

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x^2+4}{2x^4-5x^3+4x^2-5x+2}=0$

Asymptote: $y_A=0$

e) Funktionsgraph:



9) $f(x) = \frac{(x^2-1)\cdot(x^2-3)}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(x^2-1)\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)\cdot(x-1)}$

a) Definitionsbereich: $D_f = R \setminus \{-1; 1\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;3)$, $S_{x1}(-\sqrt{3};0)$, $S_{x2}(\sqrt{3};0)$

c) Unstetigkeitsstellen:

Pol: $x = 1 \rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2-3}{x-1} = \infty \quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-3}{x-1} = -\infty$

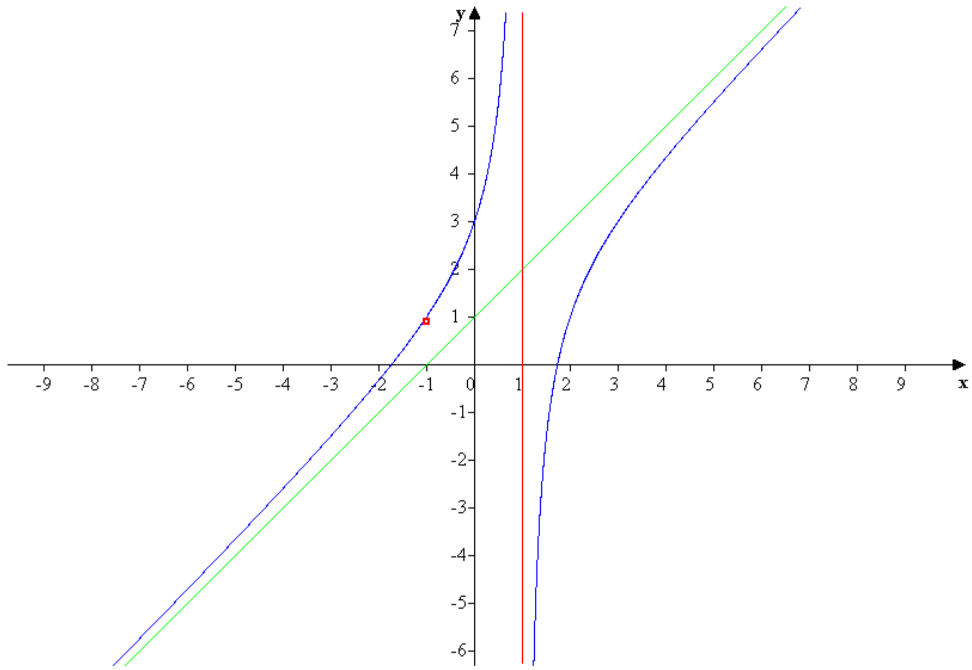
Lücke: $x = -1 \rightarrow \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-3}{x-1} = 1$

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x-1} = \pm\infty$

Asymptote: $(x^2-3):(x-1) = x+1-\frac{2}{x-1} \rightarrow y_A = x+1$

e) Funktionsgraph:



10) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^3+2x^2-10x}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{x\cdot(x-5)\cdot\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-4\right)}$

a) DB: $D_f=R\setminus\{-2;-1;1;2\}$

b) Achsenschnittpunkte: $S_y(0;0)$, $S_{x1}(0;0)$, $S_{x2}(5;0)$

c) Unstetigkeitsstellen:

Pole: $x_1=-1 \rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{x\cdot(x-5)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\infty \quad \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{x\cdot(x-5)}{(x-1)\cdot(x+1)}=-\infty$

$x_2=1 \rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x\cdot(x-5)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\infty \quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x\cdot(x-5)}{(x-1)\cdot(x+1)}=-\infty$

Lücken: $x_1=-2 \rightarrow \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x\cdot(x-5)}{\left(x^2-1\right)}=\dfrac{14}{3}\approx 4{,}67$

$x_1=2 \rightarrow \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x\cdot(x-5)}{\left(x^2-1\right)}=-2$

d) Verhalten im Unendlichen:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x^2-10x}{x^4+2x^2-3}=1$ Asymptote: $y_A=1$

e) Funktionsgraph: