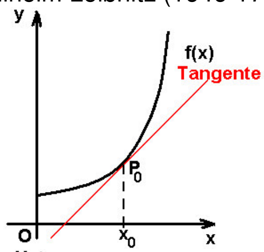
Einführung in die Differentialrechnung

Entstehung: Wilhelm Leibnitz (1646-1716) und Isaac Newton (1643-1727)

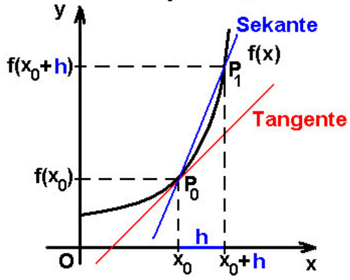
zentrales Problem:



In der Mathematik:
Berechnung des Anstieges einer nichtlinearen Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 bzw. im Punkt P_0.

In der Physik z.B.:
Berechnung der **Momentangeschwindigkeit** bei bekannter Beziehung $s(t)$ zu einem Zeitpunkt t_0

Lösung:



Anstieg der Sekante durch P_0 und P_1:

$\boxed{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ heißt **Differenzenquotient**

Bei kleiner werdendem h ($h \to 0$) bewegt sich P_1 in Richtung P_0 → Sekante wird zur Tangente

Anstieg der Tangente in P_0:

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ heißt **Differentialquotient**

Definition: Der **Grenzwert** des Differenzenquotienten heißt Differentialquotient oder Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.
Er entspricht dem Anstieg der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.
Man schreibt: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Beispiel 1: Anstieg der Funktion $f(x)=x^2$ an der Stelle $x_0=3$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = \underline{\underline{6}}$$

Beispiel 2: Anstieg der Funktion $f(x)=x^3$ an der Stelle $x_0=2$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h+h^2) = \underline{\underline{12}}$$

Definition: Ordnet man allen Stellen x_0 ihre Ableitung $f'(x_0)$ zu, so stellt diese Zuordnung wieder eine Funktion dar. Sie wird mit $f'(x)$ bezeichnet und heißt Ableitungsfunktion.

Regeln zur Bildung der Ableitungsfunktion (Ableitungsregeln):

	Funktion	**Ableitungsfunktion**
Konstantenregel:	$f(x)=c$, (c = konstant)	$f'(x)=0$
Faktorregel:	$f(x)=c\cdot g(x)$, (c = konstant)	$f'(x)=c\cdot g'(x)$
Summenregel:	$f(x)=u(x)\pm v(x)$	$f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$
Potenzregel:	$f(x)=x^r$, ($r\in R$)	$f'(x)=r\cdot x^{r-1}$

Beispiele:

	Funktion	**Ableitungsfunktion**
1)	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
2)	$f(x)=-5x^2$	$f'(x)=-10x$
3)	$f(x)=x^3-2x+8$	$f'(x)=3x^2-2$
4)	$f(x)=\dfrac{7}{3x^2}=\frac{7}{3}x^{-2}$	$f'(x)=-\frac{14}{3}x^{-3}=-\dfrac{14}{3x^3}$
5)	$f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$