**Höhere Ableitungen**

Bsp.: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 4x - 5$

→ $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x + 4$

Bildet man von der 1. Ableitungsfunktion wieder die Ableitungsfkt., so erhält man die 2. Ableitungsfkt.

→ $f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$ usw.

→ $f'''(x) = 48x - 18$ → $f^{IV}(x) = 48$ → $f^{V}(x) = 0$

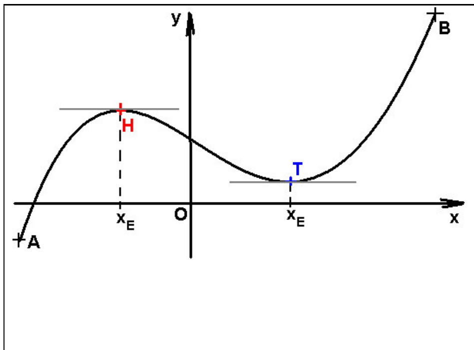
Während die 1. Ableitung die Steigung des Funktionsgraphen charakterisiert, ist der Wert der 2. Ableitung ein Maß für die Krümmung des Funktionsgraphen.

Dabei gilt: $\underline{f''(x) > 0}$ → Graph ist nach oben gekrümmt bzw.

$\underline{f''(x) < 0}$ → Graph ist nach unten gekrümmt

Diese Zusammenhänge nutzt man bei der Berechnung der lokalen Extrempunkte und Wendepunkte.

**Lokale Extrema**




Während man die Punkte A und B als globale Extrempunkte bezeichnet (A globales Minimum bzw. B globales Maximum) heißen die Punkte H und T lokale Extrempunkte (H lokales Maximum oder Hochpunkt und T lokales Minimum oder Tiefpunkt).

Die Stellen $x_E$ heißen Extremstellen.

Die Tangente in den lokalen Extrempunkten verläuft parallel zur x-Achse, d.h. der Anstieg ist in $x_E$ immer Null. → $\boxed{f'(x_E) = 0}$

Im Hochpunkt ist der Graph nach unten gekrümmt. → $\boxed{f''(x_E) < 0}$ und

Im Tiefpunkt ist der Graph nach oben gekrümmt. → $\boxed{f''(x_E) > 0}$

Um von einer gegeben Funktion $f(x)$ die lokalen Extrempunkte zu berechnen, muss man also wie folgt vorgehen:

A) $f'(x) = 0$ → Extremstellen $x_E$

B) $f''(x_E) < 0$ → Maximum $H(x_E; f(x_E))$ bzw. $f''(x_E) > 0$ → Minimum $T(x_E; f(x_E))$

Bsp. 1: $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

→ A) $f'(x) = 8x^2 - 2x - 3$ → $8x^2 - 2x - 3 = 0$ → $\underline{x_{E1} = \frac{3}{4}}$ $\underline{x_{E2} = -\frac{1}{2}}$

→ B) $f''(x) = 16x - 2$

$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 10 > 0$ → Minimum, $f\left(\frac{3}{4}\right) \approx 2{,}31$ → $\underline{\underline{T(0{,}75; 2{,}31)}}$

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -10 < 0$ → Maximum, $f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 4{,}92$ → $\underline{\underline{H(-0{,}5; 4{,}92)}}$

Bsp. 2: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$

→ A) $f'(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ → $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ → $\underline{x_{E1} = -2}$ $\underline{x_{E2} = 1}$ $\underline{x_{E3} = 2}$

→ B) $f''(x) = 3x^2 - 2x - 4$

$f''(-2) = 12 > 0$ → Minimum, $f(-2) = -\frac{19}{3} \approx -6{,}33$ → $\underline{\underline{T(-2; -6{,}33)}}$

$f''(1) = -3 < 0$ → Maximum, $f(1) = \frac{59}{12} \approx 4{,}92$ → $\underline{\underline{H(1; 4{,}92)}}$

$f''(2) = 4 > 0$ → Minimum, $f(2) = \frac{13}{3} \approx 4{,}33$ → $\underline{\underline{T(2; 4{,}33)}}$