Parameterhaltige Funktionen enthalten neben der Variablen x noch mindestens eine weitere Variable,
z.B. $f_k(x) = k \cdot x^2$, $k \in R,\ k > 0$
Man erhält also für jedes k einen speziellen Funktionsgraphen. Alle Funktionsgraphen nennt man Kurvenschar.

Bei der Untersuchung solcher Kurvenscharen geht man davon aus, dass der **Parameter** ein beliebiger **konstanter Wert** ist.

Im folgenden Abschnitt werden die Nullstellen, lokalen Extrema und Wendepunkte an ganzrationalen parameterhaltigen Funktionen berechnet.

Bsp 1) $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$, $k \in R,\ k > 0$

Nullstellen: $k^2x^3 - 6kx^2 + 9x = 0 \rightarrow x \cdot (k^2x^2 - 6kx^1 + 9) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x_{01} = 0}}$ und $(k^2x^2 - 6kx^1 + 9) = 0 \quad |:k^2$

$\rightarrow x^2 - \frac{6}{k}x + \frac{9}{k^2} = 0 \rightarrow x_{02} = \frac{3}{k} \pm \sqrt{\frac{9}{k^2} - \frac{9}{k^2}} = \underline{\underline{\frac{3}{k}}}$

lok. EP: $f_k'(x) = 3k^2x^2 - 12kx + 9 \rightarrow 3k^2x^2 - 12kx + 9 = 0 \quad |:(3k^2) \rightarrow x^2 - \frac{4}{k}x + \frac{3}{k^2} = 0$

$\rightarrow x_{1,2} = \frac{2}{k} \pm \sqrt{\frac{4}{k^2} - \frac{3}{k^2}} \rightarrow \underline{x_{E1} = \frac{3}{k}} \quad \underline{x_{E2} = \frac{1}{k}}$

$\rightarrow f_k''(x) = 6k^2x - 12k$

$\rightarrow f_k''\left(\frac{3}{k}\right) = 6k > 0 \rightarrow$ Minimum $f_k\left(\frac{3}{k}\right) = 0 \rightarrow \underline{\underline{T_k\left(\frac{3}{k}; 0\right)}}$

$\rightarrow f_k''\left(\frac{1}{k}\right) = -6k < 0 \rightarrow$ Maximum $f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{4}{k} \rightarrow \underline{\underline{H_k\left(\frac{1}{k}; \frac{4}{k}\right)}}$

Wendepkte.: $f_k''(x) = 6k^2x - 12k \rightarrow 6k^2x - 12k = 0 \rightarrow \underline{x_W = \frac{2}{k}}$

$\rightarrow f_k'''(x) = 6k^2 \neq 0$ und $f_k\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{2}{k} \rightarrow \underline{\underline{W_k\left(\frac{2}{k}; \frac{2}{k}\right)}}$

Bsp 2) $f_t(x) = x^3 - (t^3 + 6t)x^2$, $t \in R$

Nullstellen: $x^3 - (t^3 + 6t)x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x - 6t - t^3) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x_{01} = 0}}$ und $(x - 6t - t^3) = 0$

$\rightarrow x_{02} = \underline{\underline{t^3 + 6t}}$

lok. EP: $f_t'(x) = 3x^2 - 2(t^3 + 6t)x \rightarrow 3x^2 - 2(t^3 + 6t)x = 0 \rightarrow x \cdot (3x - 2(t^3 + 6t)x) = 0$

$\rightarrow \underline{x_{E1} = 0} \quad \underline{x_{E2} = \frac{2}{3}(t^3 + 6t)}$

$\rightarrow f_t'' = 6x - 2(t^3 + 6t)$

$$\rightarrow f_t''(0) = -2t(t^2 + 6) = \begin{cases} > 0 \text{ für } t < 0 \rightarrow \text{Minimum} \\ < 0 \text{ für } t > 0 \rightarrow \text{Maximum} \\ = 0 \text{ für } t = 0 \rightarrow \text{kein Extrempkt} \end{cases}$$

$$\rightarrow f_t''\left(\tfrac{2}{3}(t^3 + 6t)\right) = 2t(6 + t^2) = \begin{cases} > 0 \text{ für } t > 0 \rightarrow \text{Minimum} \\ < 0 \text{ für } t < 0 \rightarrow \text{Maximum} \\ = 0 \text{ für } t = 0 \rightarrow \text{kein Extrempkt} \end{cases}$$

$\rightarrow f_t(0) = 0$ und $f_t\left(\frac{2}{3}(t^3 + 6t)\right) = -\frac{4}{27}(t^3 + 6t)^3$

$\rightarrow$ Falls $t > 0$: $H(0; 0) \quad T\left(\frac{2}{3}(t^3 + 6t); -\frac{4}{27}(t^3 + 6t)^3\right)$

$\rightarrow$ Falls $t < 0$: $T(0; 0) \quad H\left(\frac{2}{3}(t^3 + 6t); -\frac{4}{27}(t^3 + 6t)^3\right)$

Wendepkte.: $f_t'' = 6x - 2(t^3 + 6t) \rightarrow 6x - 2(t^3 + 6t) = 0 \rightarrow \underline{x_W = \frac{1}{3}(t^3 + 6t)}$

$\rightarrow f_t'''(x) = 6 \neq 0$ und $f_t\left(\frac{1}{3}(t^3 + 6t)\right) = -\frac{1}{9}(t^3 + 6t)^3 \rightarrow \underline{\underline{W\left(\frac{1}{3}(t^3 + 6t); -\frac{1}{9}(t^3 + 6t)^3\right)}}$