1. Ein Zaun von 40m Länge soll dazu verwendet werden, eine rechteckige Fläche mit größtmöglichem Inhalt einzuschließen.
   Man ermittle die Länge l, die Breite b und den maximalen Flächeninhalt A!

0. Skizze:

1) Zielfunktion: $A(l,b) = lb$

2) Nebenbedingung: $u = 2l + 2b = 40 \rightarrow \underline{l = 20 - b}$

3) Umformen der Zielfunktion: $A(b) = (20 - b) \cdot b = 20b - b^2$

4) Extremstelle(n): $A'(b) = 20 - 2b \rightarrow 20 - 2b = 0 \rightarrow \underline{b_E = 10}$

5) Nachweis des Maximums: $A''(b) = -2 \rightarrow$ Maximum

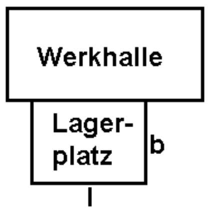
6) restl. Werte: $\underline{l_E = 10}$, $\underline{A_{max} = 100m^2}$

Antwort:
Die rechteckige Fläche muss ein Quadrat mit der Seitenlänge 10m sein. Der max. Flächeninhalt beträgt 100m².

---

2. Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einer Fläche von 450m² angelegt werden. Dazu ist der Platz an 3 Seiten zu umzäumen, an der 4. Seite begrenzt ihn die Werkhalle. Die Abmessungen des Lagerplatzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird.
   Berechnen Sie für diesen Fall Länge und Breite des Platzes und die Gesamtlänge des Zaunes!

0. Skizze:



1) Zielfunktion: $z(l,b) = 2b + l$

2) Nebenbedingung: $A = lb = 450 \rightarrow \underline{l = \frac{450}{b}}$

3) Umformen der Zielfunktion: $z(b) = 2b + \frac{450}{b}$

4) Extremstelle(n): $z'(b) = 2 - \frac{450}{b^2} \rightarrow 2 - \frac{450}{b^2} = 0 \quad | \cdot b^2 \rightarrow \underline{b_{E1} = 15}$ $[b_{E2} = -15]$ entfällt

5) Nachweis des Minimums: $z''(b) = \frac{900}{b^3} > 0 \rightarrow$ Minimum

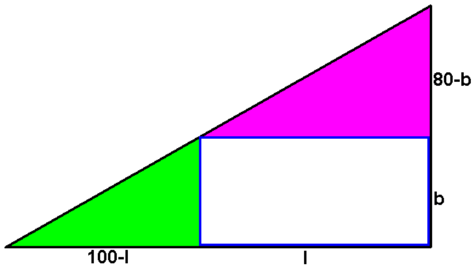
6) restl. Werte: $\underline{l_E = 30}$, $\underline{z = 60}$

Antwort:
Der Platz muss 15m breit und 30m lang sein. Die Zaunlänge beträgt 60m.

---

3. Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80m und 100m hat, soll eine Halle mit rechteckiger Grundfläche errichtet werden.
   Bei welchen Abmessungen wird die Hallenfläche am größten?

0. Skizze:



1) Zielfunktion: $A(l,b) = lb$

2) Nebenbedingung: großes Dreieck ist dem grünen und lila Dreieck ähnlich → $\frac{80}{100} = \frac{80-b}{l} = \frac{b}{100-l}$ →

$\underline{l = 100 - \frac{5}{4}b}$ bzw. $\underline{b = 80 - \frac{4}{5}l}$

3) Umformen der Zielfunktion: $A(b) = 100b - \frac{5}{4}b^2$ bzw. $A(l) = 80l - \frac{4}{5}l^2$

4) Extremstelle(n): $A'(b) = 100 - \frac{5}{2}b$ bzw. $A'(l) = 80 - \frac{8}{5}l$

→ $100 - \frac{5}{2}b = 0$ bzw. $= 80 - \frac{8}{5}l = 0$

→ $\underline{b_E = 40}$ bzw. $\underline{l_E = 50}$

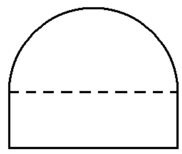
5) Nachweis des Maximums: $A''(b) = -\frac{5}{2} < 0$ bzw. $A''(l) = -\frac{8}{5} < 0$ → Maximum

6) restl. Werte: $\underline{l_E = 50}$, $\underline{b_E = 40}$

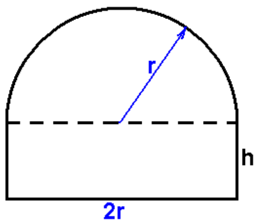
Antwort:
Die Hallenfläche wird am größten, wenn sie 40m breit und 50m lang ist.

---

4. Der Querschnitt eines 25m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (siehe Abbildung). Der Umfang der Querschnittsfläche beträgt 18m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Tunnelvolumen möglichst groß wird?



0. Skizze:



1) Zielfunktion: $V(r,h) = \left(2rh + \frac{\pi}{2}r^2\right) \cdot 25$

2) Nebenbedingung: $u = 2r + 2h + \pi r = 18$ → $2h = 18 - 2r - \pi r$ → $\underline{h = 9 - r - \frac{\pi}{2}r}$

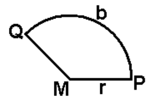
3) Umformen der Zielfunktion: $V(r) = \left(r \cdot (18 - 2r - \pi r) + \frac{\pi}{2}r^2\right) \cdot 25 = 25 \cdot \left(18r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2\right)$

4) Extremstelle(n): $V'(r) = 25 \cdot \left(18 - 2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot r\right)$ → $25 \cdot \left(18 - 2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot r\right) = 0$ → $\underline{r_E = \frac{18}{4+\pi} \approx 2{,}52}$ → $\underline{h \approx 2{,}52}$

5) Nachweis des Maximums: $V''(r) = 25 \cdot (-4 - \pi) < 0$ Maximum

Antwort:
Der Radius des Halbkreises muss 2,52m groß sein.

5. Ein Kreisausschnitt PQM habe einen Flächeninhalt von $A = 100m^2$.
   Bestimmen Sie den Radius und die Länge des Kreisbogens b für den Fall, dass der Umfang des Kreisausschnittes minimal wird!



1) Zielfunktion: $u(r,b) = 2r + b$

2) Nebenbedingung: $b : u = 100 : \pi r^2 \rightarrow \frac{b}{2\pi r} = \frac{100}{\pi r^2} \rightarrow b = \frac{200}{r}$

3) Umformen der Zielfunktion: $u(r) = 2r + \frac{200}{r}$

4) Extremstelle(n): $u'(r) = 2 - \frac{200}{r^2} \rightarrow \underline{r_{E1} = 10}$ $\underline{[r_{E2} = -10]}$ entfällt

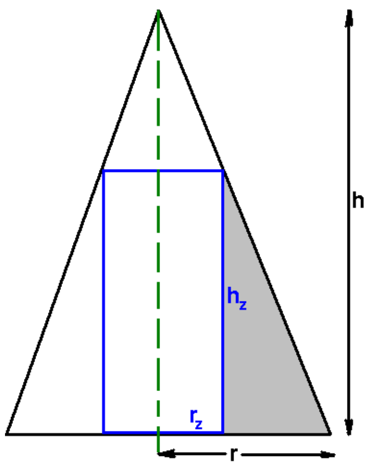
5) Nachweis des Minimums: $u''(r) = \frac{400}{r^3} > 0 \rightarrow$ Minimum

6) restl. Wert: $\underline{b_E = 20}$

Antwort:
   Der Radius des Kreisausschnittes muss 10m und der Kreisbogen 20m groß sein.

6. Einem geraden Kreiskegel mit gegebenem Grundkreisdurchmesser d und Höhe h soll der Kreiszylinder mit größtmöglichem Volumen einbeschrieben werden, so dass sein Grundkreis auf dem des Kreiskegels liegt. Bestimmen Sie für diesen Fall den Grundkreisradius, Höhe und Volumen des Kegels!

0. Skizze:



1) Zielfunktion: $V_Z(r_Z, h_Z) = \pi r_Z^2 \cdot h_Z$

2) Nebenbedingung: $\frac{h}{r} = \frac{h_Z}{r - r_Z} \rightarrow h_Z = h \cdot \frac{r - r_Z}{r}$

3) Umformen der Zielfunktion: $V_Z(r_Z) = \pi r_Z^2 \cdot h \cdot \frac{r - r_Z}{r} = -\frac{\pi h}{r} r_Z^3 + \pi h \cdot r_Z^2$

4) Extremstelle(n): $V_Z'(r_Z) = -\frac{3\pi h}{r} r_Z^2 + 2\pi h \cdot r_Z \rightarrow -\frac{3\pi h}{r} r_Z^2 + 2\pi h \cdot r_Z = 0$

$\rightarrow r_Z \cdot (2r - 3r_Z) \rightarrow \underline{[r_{ZE1} = 0]}$ entfällt $\underline{r_{ZE2} = \frac{2}{3} r}$

5) Nachweis des Maximums: $V_Z''(r_Z) = \frac{\pi h}{r} \cdot (2r - 6r_Z) \rightarrow V_Z''(\frac{2}{3} r) = -2\pi h < 0 \rightarrow$ Maximum

6) restl. Werte: $\underline{h_{ZE} = \frac{1}{3} h}$ und $\underline{V_Z = \frac{4}{27} \cdot \pi r^2 h}$

Antwort:
   Der Radius des Kreiszylinders muss $\frac{2}{3}$ mal so groß sein wie der Radius des Kreiskegels.
   Die Höhe des Kreiszylinders muss $\frac{1}{3}$ mal so groß sein wie die Höhe des Kreiskegels.
   Das Volumen des Kreiszylinders ist maximal $\frac{4}{27}$ mal so groß wie das Volumen des Kreiskegels.