Extremwertprobleme sind Aufgaben, bei denen eine Größe extrem groß (maximal) bzw. klein (minimal) werden soll, die von mehreren anderen Größen abhängig ist.

Typische Probleme sind z.B.:
- Volumen (Rauminhalt) eines Körpers soll maximal werden bei gleichem Oberflächeninhalt (Verpackung)
- Oberflächeninhalt (Verpackung) eines Körpers soll minimal werden bei gleichem Volumen (Rauminhalt)
- umschlossene Fläche soll maximal werden bei gleichem Umfang
- Umfang einer Fläche soll minimal werden bei gleichem Flächeninhalt
- Kosten sollen minimal werden

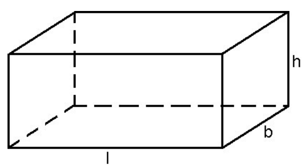
Die Lösung all dieser Aufgaben läuft nach gleichem Schema ab:

0) ggf. Anfertigen einer Skizze und Einführen von günstige Variablen
1) Notieren der Zielfunktion → Formel zur Berechnung der Größe, die extrem werden soll
2) Notieren aller Nebenbedingungen → Beziehungen zwischen den Größen, die in der Formel vorkommen
3) Umformen der Zielfunktion in eine Funktion, die nur noch von einer Größe abhängig ist
→ Substitution der anderen Größen mit Hilfe der Nebenbedingungen
4) Berechnen der Extremstelle(n) der Zielfunktion
5) Nachweis des Maximums bzw. Minimums
6) Berechnen weiterer gesuchter Größen mit Hilfe der Nebenbedingungen bzw. der Zielfunktion

Beispiel 1:

Es sind quaderförmige Behälter mit einem Volumen von 12m³ herzustellen, bei denen die Breite halb so groß wie ihre Länge ist. Welche Maße muss ein solcher Behälter haben, damit zu seiner Herstellung möglichst wenig Material verbraucht wird?

0. Skizze:



1) Zielfunktion: $A_O(l,b,h) = 2lb + 2lh + 2bh$

2) Nebenbedingungen: A) $V = lbh = 12$ und B) $\underline{l = 2b}$ → B) in A) → $2b^2h = 12$ → C) $\underline{h = \frac{6}{b^2}}$

3) Umformen der Zielfunktion: B) und C) in 1) → $A_O(b) = 4b^2 + \frac{24}{b} + \frac{12}{b} = 4b^2 + \frac{36}{b}$

4) Extremstelle(n): $A'_O(b) = 8b - \frac{36}{b^2}$ → $8b - \frac{36}{b^2} = 0 \quad | \cdot \frac{b^2}{8}$ → $b^3 = \frac{9}{2}$ → $\underline{b_E = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx 1{,}65}$

5) Nachweis des Minimums: $A''_O(b) = 8 + \frac{72}{b^3} > 0$ → Minimum

6) restl. Maße: aus B) → $\underline{l_E = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx 3{,}30}$ und aus C) → $\underline{h_E \approx \frac{6}{1{,}65^2} \approx 2{,}20}$

Probe: $3{,}30\text{m} \cdot 1{,}65\text{m} \cdot 2{,}20\text{m} \approx 12\text{m}^3$

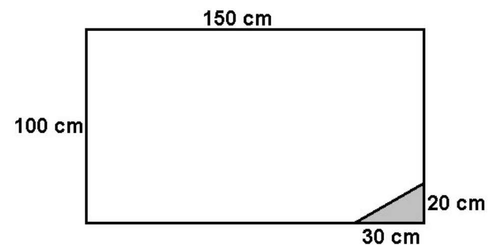
Antwort: Der quaderförmige Behälter muss 3,30m lang, 1,65m breit und 2,20m hoch sein.

Beispiel 2:

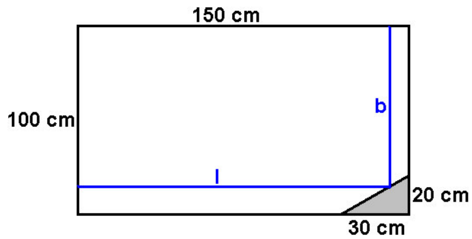
Von einer rechteckigen Marmorplatte ist an einer Ecke ein Stück abgebrochen. Aus der Restplatte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden.

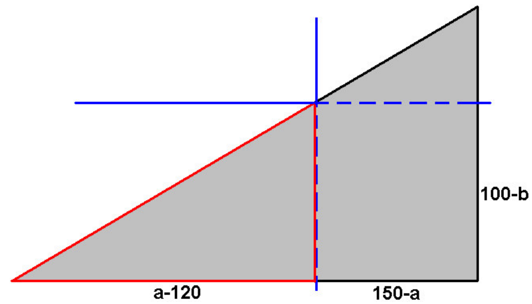
Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen?

(Maße siehe Abbildung!)



0. Skizze:





1) Zielfunktion: $A(l,b) = lb$

2) Nebenbedingung: graues und rotes Dreieck sind ähnlich → $\frac{100-b}{l-120} = \frac{2}{3}$ → $\underline{l = 270 - \frac{3}{2}b}$

3) Umformen der Zielfunktion: $A(b) = 270b - \frac{3}{2}b^2$

4) Extremstelle(n): $A'(b) = 270 - 3b$ → $270 - 3b = 0$ → $\underline{b_E = 90}$

5) Nachweis des Maximums: $A''(b) = -3 < 0$ → Maximum

6) restl. Maß: $\underline{l_E = 270 - \frac{3}{2} \cdot 90 = 135}$

Antwort: Die Restplatte muss 1,35m lang, und 0,90m breit sein.