Das Integrieren ist gewissermaßen die Umkehrung des Differenzierens:

$$\text{Funktion } f(x) \xrightarrow{\text{Differenzieren}} \text{Ableitungsfunktion } f'(x)$$
$$\text{Stammfunktion } F(x) \xleftarrow[\text{Integrieren}]{} \text{Funktion } f(x)$$

Definition: F(x) heißt Stammfunktion von f(x), falls F'(x) = f(x).

Beispiel: $f(x) = 3x^2$ → $F(x) = x^3$, da $F'(x) = 3x^2$ oder $F(x) = x^3 + 7$, da $F'(x) = 3x^2$

→ Zu einer Funktion f(x) gibt es **unendlich viele Stammfunktionen**, die sich alle nur in einer **Konstanten** unterscheiden

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f(x) heißt unbestimmtes Integral über f(x).

Man schreibt: $\int f(x)dx = F(x) + C$ gesprochen: (unbestimmtes) Integral über f(x) nach dx

f(x) – Integrant
dx – Differential
x – Integrationsvariable

F(x) – Stammfunktion
C – Integrationskonstante

Beispiele:

1) $\int 9x\,dx = \frac{9}{2}x^2 + C$ 2) $\int ax\,dx = \frac{a}{2}x^2 + C$ 3) $\int ax\,da = \frac{x}{2}a^2 + C$ 4) $\int ax\,dv = ax\cdot v + C$ 5) $\int 2t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3 + C$

Integrationsregeln für Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen:

Potenzregel: $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$, $r \in R$, $r \neq -1$

Faktorregel: $\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$

Summenregel: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Beispiele:

1) $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ 2) $\int 8x^3\,dx = 2x^4 + C$ 3) $\int (3x^2 - 4x + 2)dx = x^3 - 2x^2 + 2x + C$

4) $\int 5\sqrt{x}\,dx = 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 5\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + C$ 5) $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x} + C$

6) $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2}dx = \int\left(\frac{2x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int (2x - x^{-2})dx = x^2 + \frac{1}{x} + C$

7) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{6}}\right)dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$