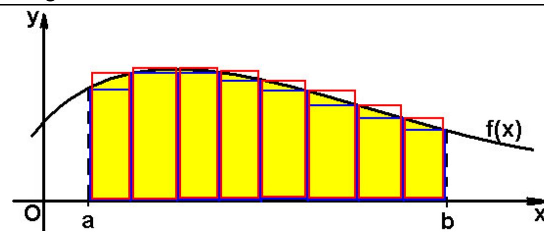
Problem:
Zu berechnen ist der **Flächeninhalt** unter dem Graphen der Funktion f(x) im Intervall [a; b] !

(in der Abbildung gelb gezeichnet)



Lösung:

1) Zerlegung des Intervalls [a; b] in n gleich große Teilintervalle der Breite $\frac{b-a}{n} = \Delta x$

2) Bilden der unteren und oberen Rechtecksumme: $\boxed{\underline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x}$ und $\boxed{\overline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x}$

3) Grenzwertbildung für $n \to \infty$ bzw. $\Delta x = 0$

Definition: Der gemeinsame Grenzwert der unteren und oberen Rechtecksumme heißt bestimmtes Integral der Funktion f(x) im Intervall [a; b].

Das heißt: $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \underline{s_n} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{s_n} = \int_a^b f(x)\,dx$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
Ist f eine in [a; b] stetige Funktion und F eine zu f gehörende Stammfunktion, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Beispiel 1:

$$\int_2^5 \left(-x^2 + 3x - 1\right)dx = [-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - x]_2^5 = -\tfrac{1}{3}\cdot 125 + \tfrac{3}{2}\cdot 25 - 5 - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 8 + \tfrac{3}{2}\cdot 4 - 2\right) = \underline{\underline{-14{,}5}}$$

Beispiel 2: Flächeninhalt unter Graph der Funktion $f(x) = x + 2$ im Intervall [1; 3]?

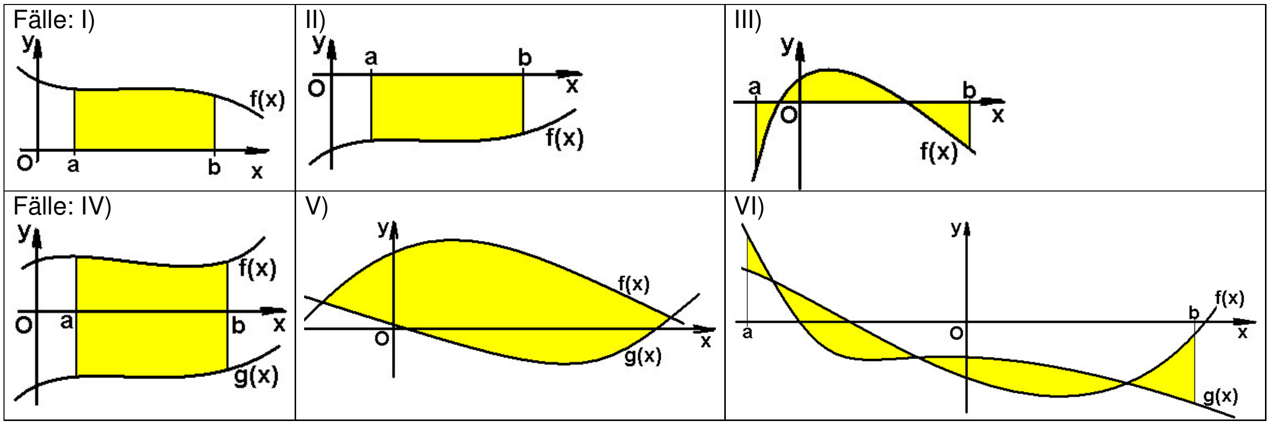
A) Trapezformel: → $A = \frac{f(1) + f(3)}{2} \cdot 2 = \frac{3+5}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{8FE}}$

B) Integralrechnung: → $\int_1^3 (x+2)\,dx = [\tfrac{1}{2}x^2 + 2x]_1^3 = \tfrac{9}{2} + 6 - \left(\tfrac{1}{2} + 2\right) = 10{,}5 - 2{,}5 = \underline{\underline{8FE}}$

Eigenschaften bestimmter Integrale:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ 2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ 3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Flächenberechnung



Bsp. zu I) Fläche unter $f(x)=x^2+4x+5$ im Intervall $[a;b]=[-3;1]$

→ $\int_{-3}^{1}\left(x^2+4x+5\right)dx=[\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x]_{-3}^{1}=\frac{1}{3}+2+5-\left(-9+18-15\right)=13\frac{1}{3}$ → $\underline{\underline{A=13\frac{1}{3}FE}}$

Bsp. zu II) Fläche unter $f(x)=-x^2-4x-5$ im Intervall $[a;b]=[-3;1]$

→ $\int_{-3}^{1}\left(-x^2-4x-5\right)dx=[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x]_{-3}^{1}=-13\frac{1}{3}$ → $A=\left|\int_{-3}^{1}\left(-x^2-4x-5\right)dx\right|=\underline{\underline{13\frac{1}{3}FE}}$

→ Zusammenfassung aus I und II: $A=\left|\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right|$, falls f(x) in [a; b] keine Nullstellen besitzt!

Bsp. zu III) Fläche unter $f(x)=\left(x^2-4\right)\cdot\left(1-x\right)$ im Intervall $[a;b]=[-3;3]$

→ Nullstellen von f(x): $x_{01}=-2\quad x_{02}=1\quad x_{03}=2$ → $A=\left|\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{-2}^{1}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{1}^{2}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}f(x)\,dx\right|$

GTR → $\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx\approx\underline{8{,}58}\quad\int_{-2}^{1}f(x)\,dx\approx\underline{-11{,}25}\quad\int_{1}^{2}f(x)\,dx\approx\underline{0{,}58}\quad\int_{2}^{3}f(x)\,dx\approx\underline{-3{,}92}$ → $\underline{\underline{A\approx 24{,}33FE}}$

Bsp. zu IV) Fläche zwischen $f(x)=x^2+2$ und $g(x)=-x-2$ im Intervall $[a;b]=[-1;1]$

→ Schnittstellen beider Graphen: $x^2+2=-x-2$ → $x^2+x+4=0$ → keine Schnittstellen

→ $A=\left|\int_{a}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$ → $A=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^2+2-(-x-2)\right)dx\right|=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^2+x+2\right)dx\right|=\left|[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x]_{-1}^{1}\right|=\underline{\underline{8\frac{2}{3}FE}}$

Bsp. zu V) Die von den Graphen $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x$ und $g(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x$ **vollständig eingeschlossene** Fläche!

→ Schnittstellen beider Graphen: $\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x$ → $x^3-x^2-6x=0$ → $x_1=-2\quad x_2=0\quad x_3=3$

→ $A=\left|\int_{-2}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$ → GTR: $A\approx 1{,}78FE+5{,}25FE\approx\underline{\underline{7{,}03FE}}$

Bsp. zu VI) Fläche zwischen $f(x)=x^2-1$ und $g(x)=x+1$ im Intervall $[a;b]=[-2;3]$

→ Schnittstellen beider Graphen: $x^2-1=x+1$ → $x^2-x-2=0$ → $x_1=-1\quad x_2=2$

→ $A=\left|\int_{-2}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int_{2}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$ → GTR: $A\approx 1{,}83FE+4{,}5FE+1{,}83FE\approx\underline{\underline{8{,}16FE}}$