Grenzwertberechnung:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x+1}{1}=\underline{\underline{5}}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{1}=\underline{\underline{-1}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1}=\underline{\underline{2}}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=\underline{\underline{0}}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{e^x}=\underline{\underline{0}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{24x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x}{24}=\underline{\underline{\frac{1}{12}}}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\underline{\underline{0}}$ 8*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$ Substitution: $z=\frac{1}{x}$ → $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z}{1}=\underline{\underline{1}}$

9*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin^2\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x^{-1}}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^{-2}\cdot 2\sin x^{-1}}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\underline{\underline{1}}$ (siehe 8*)

10*) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{x}\right)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)}$ Subst.: $z=\frac{1}{x}$ → $\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z}\right)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot z)}{\pi}\right)}=\underline{\underline{1}}$

Tangente und Normale:

1) Geg.: $f(x)=e^{-0,5x}-\frac{2}{x}$. Ges.: $t(x)$ im Punkt $P(-2;f(-2))$

→ $f'(x)=-0,5\cdot e^{-0,5x}+\frac{2}{x^2}$ → $m=f'(-2)=\underline{-0,5\cdot e+0,5}$

→ $f(-2)=e+1$ → $e+1=(-0,5\cdot e+0,5)\cdot(-2)+n$ → $\underline{n=2}$ → Tangentengleichung: $\underline{\underline{t(x)=(-0,5e+0,5)\cdot x+2}}$

2) Geg.: $f(x)=-3\cos\frac{x}{4}$ Ges.: $t(x)$ im Punkt $P(\pi;f(\pi))$

→ $f'(x)=\frac{3}{4}\sin\frac{x}{4}$ → $m=f'(\pi)=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{3}{8}\sqrt{2}\approx 0,530}$

→ $f(\pi)=-3\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}\approx -2,121$ → $-\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{8}\sqrt{2}\cdot\pi+n$ → $\underline{n=-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{8}\pi\sqrt{2}\approx -3,787}$

→ Tangentengleichung: $\underline{\underline{t(x)=\frac{3}{8}\sqrt{2}\cdot x-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{8}\pi\sqrt{2}}}$ bzw. $\underline{\underline{t(x)=0,530\cdot x-3,787}}$

3) Geg.: $f_k(x)=x^2e^{1-kx}$, $x=1$, Anstiegswinkel 45° Ges.: k, Tangentengleichung

→ $f_k'(1)=\tan 45°=1$ → $f_k'(x)=2x\cdot e^{1-kx}+x^2(-k)\cdot e^{1-kx}=e^{1-kx}(2x-kx^2)$ → $f_k'(1)=e^{1-k}(2-k)=1$ → $\underline{\underline{k=1}}$

→ Tangentengleichung: $\underline{\underline{t(x)=x}}$

4) Geg.: $y=f_t(x)=\frac{1}{t}(x-2t)\sqrt{x}$, t>0, gleichschenkliges Dreieck aus Punkt $R_t(2t;f_t(2t))$, S_x und S_y

→ $f_t'(x)=\frac{1}{t}\sqrt{x}+\frac{x-2t}{2t\sqrt{x}}=\frac{2x+x-2t}{2t\sqrt{x}}=\frac{3x-2t}{2t\sqrt{x}}$ → $m=f_t'(2t)=\frac{6t-2t}{2t\sqrt{2t}}=\frac{2}{\sqrt{2t}}=\sqrt{\frac{2}{t}}$

→ Dreieck gleichschenklig, falls $\sqrt{\frac{2}{t}}=1$ → $\underline{\underline{t=2}}$

5) Die Tangente und die Normale an den Graphen der Funktion $f_a(x)=-e^{2ax}+4e^{ax}+5$ $(a\in R, a>0)$ im Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit der Ordinatenachse bilden mit der Abszissenachse ein Dreieck. Es existiert genau ein Wert a, für den dieses Dreieck gleichschenklig ist. Ges.: a

→ $f_a(0)=-1+4+5=8$ und $f_a'(x)=-2ae^{2ax}+4ae^{ax}=2ae^{ax}$ → $f_a'(0)=2a$

→ Tangentengleichung: $y_T=2a\cdot x+8$ → Normalengleichung: $y_N=-\frac{1}{2a}\cdot x+8$

→ Dreieck gleichschenklig, falls $2a=1$ bzw. $-\frac{1}{2a}=-1$ → $\underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}$

Lokale Extrempunkte:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen die lokalen Extrema und geben Sie deren Art an!

1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2} \rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2}=0 \rightarrow \underline{x_E=0}$

$f''(x)=\frac{4\cdot(x^2+1)^2-4x\cdot 2x\cdot 2\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} \rightarrow \underline{f''(0)=4>0} \rightarrow$ Minimum

$f(0)=-1 \rightarrow \underline{\underline{T(0;-1)}}$

2) $f(x)=x\cdot e^x \rightarrow f'(x)=e^x+x\cdot e^x=e^x(x+1) \rightarrow e^x(x+1)=0 \rightarrow \underline{x_E=-1}$

$f''(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2) \rightarrow \underline{f''(-1)=\frac{1}{e}>0} \rightarrow$ Minimum

$f(-1)=-\frac{1}{e} \rightarrow \underline{\underline{T(-1;-\frac{1}{e})}}$

3) $f(x)=\sqrt{2x+3}-x \quad \rightarrow x\geq -1{,}5$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1=0 \rightarrow \sqrt{2x+3}=1 \rightarrow 2x+3=1 \rightarrow \underline{x_E=-1}$

$f''(x)=\frac{-1}{\sqrt{(2x+3)^3}} \rightarrow \underline{f''(-1)=-1<0} \rightarrow$ Maximum

$f(-1)=2 \rightarrow \underline{\underline{H(-1,2)}}$

4) $f(x)=1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ mit $x\in[0;\pi]$

$f'(x)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow -2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0 \rightarrow 2x-\frac{\pi}{2}=k\cdot\pi \rightarrow x=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \rightarrow \underline{x_{E1}=\frac{\pi}{4}} \quad \underline{x_{E2}=\frac{3}{4}\pi}$

$f''(x)=-4\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-4<0 \rightarrow$ Maximum

$\rightarrow f''(\frac{3}{4}\pi)=4>0 \rightarrow$ Minimum

$f(\frac{\pi}{4})=2 \rightarrow \underline{\underline{H(\frac{\pi}{4};2)}}$ und $f(\frac{3}{4}\pi)=0 \rightarrow \underline{\underline{T(\frac{3}{4}\pi;0)}}$

Wendepunkte

Berechnen Sie von folgenden Funktionen die Wendepunkte!

1) $f(x)=\frac{2-x^2}{x^2+1} \rightarrow f'(x)=\frac{-2x(x^2+1)-(2-x^2)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$\rightarrow f''(x)=\frac{-6(x^2+1)^2+6x\cdot 2x\cdot 2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{18x^2-6}{(x^2+1)^3} \rightarrow \frac{18x^2-6}{(x^2+1)^3}=0 \rightarrow \underline{x_{W1}=\sqrt{\tfrac{1}{3}}} \quad \underline{x_{W2}=-\sqrt{\tfrac{1}{3}}}$

$\rightarrow f'''(x)=\frac{36x(x^2+1)^3-(18x^2-6)\cdot 2x\cdot 3(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6}=\frac{-72x^3+72x}{(x^2+1)^4}$

$\rightarrow \underline{f'''(\sqrt{\tfrac{1}{3}})\neq 0}$ und $\underline{f'''(-\sqrt{\tfrac{1}{3}})\neq 0}$

$f(\sqrt{\tfrac{1}{3}})=\frac{2-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{5}{4}$ und $f(-\sqrt{\tfrac{1}{3}})=\frac{5}{4} \rightarrow \underline{\underline{W_1\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}};\frac{5}{4}\right)}} \quad \underline{\underline{W_2\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}};\frac{5}{4}\right)}}$

2) $f(x)=x\cdot e^x \rightarrow f'(x)=e^x+x\cdot e^x=e^x(x+1)$ und $f''(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2) \rightarrow e^x(x+2)=0 \rightarrow \underline{x_w=-2}$

$\rightarrow f'''(x)=e^x(x+2)+e^x=e^x(x+3)$ und $\underline{f'''(-2)\neq 0}$

$\rightarrow f(-2)=-2\cdot e^{-2}=-\frac{2}{e^2} \rightarrow \underline{\underline{W\left(-2;-\frac{2}{e^2}\right)}}$

3) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ mit $x\in[0;\pi] \rightarrow f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ und $f''(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow -4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \rightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=k\cdot\pi \rightarrow \underline{x_{w1}=\frac{3}{8}\pi} \quad \underline{x_{w2}=\frac{7}{8}\pi}$

$\rightarrow f'''(x)=-8\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ und $f'''(\frac{3}{8}\pi)\neq 0$ und $f'''(\frac{7}{8}\pi)\neq 0$

$\rightarrow f(\frac{3}{8}\pi)=\sin\pi=0$ und $f(\frac{7}{8}\pi)=\sin 2\pi=0 \rightarrow \underline{\underline{W_1(\frac{3}{8}\pi;0)}} \quad \underline{\underline{W_2(\frac{7}{8}\pi;0)}}$

Parameterhaltige Funktionen

1) Geg.: $f_t(x) = t \cdot \sin(t \cdot x) + t$ mit $t \in R,\ t > 1,\ x \in [0;\pi]$ Ges.: EP

→ $f_t'(x) = t^2 \cdot \cos(t \cdot x)$ → $t^2 \cdot \cos(t \cdot x) = 0$ → $t \cdot x = \frac{\pi}{2}$ → $\underline{x_E = \frac{\pi}{2t}}$

→ $f_t''(x) = -t^3 \cdot \sin(t \cdot x)$ und $\underline{f_t''(\frac{\pi}{2t}) = -t^3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -t^3 < 0}$ → Maximum

→ $f_t(\frac{\pi}{2t}) = t \cdot \sin\frac{\pi}{2} + t = 2t$ → $\underline{\underline{H_t\left(\frac{\pi}{2t}; 2t\right)}}$

2) Geg.: $f_a(x) = a \cdot \sqrt{x} - x$ mit $a \in R,\ a \neq 0$ Ges.: a) x_0 b) EP c) WP

a) $a \cdot \sqrt{x} - x = 0$ → $a^2 \cdot x - x^2 = 0$ → $x(a^2 - x) = 0$ → $\underline{\underline{x_{01} = 0}}$ $\underline{\underline{x_{02} = a^2}}$ für $a > 0$

Probe für $x_{01} = 0$: $f_a(0) = a \cdot \sqrt{0} - 0 = 0$ wahre Aussage

Probe für $x_{02} = a^2$: $f_a(a^2) = a \cdot \sqrt{a^2} - a^2 = 0$ → wahre Aussage für $a > 0$

b) $f_a'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - 1$ → $\frac{a}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ → $\underline{x_E = \frac{a^2}{4}}$ für $a > 0$

$f_a''(x) = -\frac{a}{4\sqrt{x^3}}$ → $\underline{f_a''\left(\frac{a^2}{4}\right) = -\frac{a}{4\frac{a^3}{8}} = -\frac{2}{a^2} < 0}$ → Maximum $\underline{f_a\left(\frac{a^2}{4}\right) = a \cdot \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}}$ → $\underline{\underline{H\left(\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{4}\right)}}$

c) → $-\frac{a}{4\sqrt{x^3}} = 0$ → keine Wendepunkte

3) Geg.: $f_k(x) = \frac{2 - k \cdot x}{x^2}$ mit $k \in R, k > 0$ Ges.: a) S_x b) EP c) WP d) f_{Min}

a) $\frac{2 - k \cdot x}{x^2} = 0$ → $\underline{x_0 = \frac{2}{k}}$ → $\underline{\underline{S_x\left(\frac{2}{k}; 0\right)}}$

b) $f_k(x) = \frac{2 - k \cdot x}{x^2} = 2x^{-2} - kx^{-1}$ → $f_k'(x) = \frac{-4}{x^3} + \frac{k}{x^2}$ → $\frac{k \cdot x - 4}{x^3} = 0$ → $\underline{x_E = \frac{4}{k}}$

$f_k''(x) = \frac{12}{x^4} - \frac{2k}{x^3} = \frac{12 - 2k \cdot x}{x^4}$ und $\underline{f_k''\left(\frac{4}{k}\right) = \frac{k^4}{64} > 0}$ → Minimum $f_k\left(\frac{4}{k}\right) = \frac{-2k^2}{16}$ → $\underline{\underline{T\left(\frac{4}{k}; -\frac{k^2}{8}\right)}}$

c) $\frac{12 - 2k \cdot x}{x^4} = 0$ → $\underline{x_W = \frac{6}{k}}$

$f_k'''(x) = \frac{-48}{x^5} + \frac{6k}{x^4} = \frac{6k \cdot x - 48}{x^5}$ → $\underline{f_k'''\left(\frac{6}{k}\right) = \frac{-12k^5}{6^5} \neq 0}$ und $f_k\left(\frac{6}{k}\right) = -\frac{k^2}{9}$ → $\underline{\underline{T\left(\frac{6}{k}; -\frac{k^2}{9}\right)}}$

d) $x = \frac{4}{k}$ → $k = \frac{4}{x}$ → $y = -\frac{16}{8x^2}$ → $\underline{\underline{f_{Min} = -\frac{2}{x^2}}}$

4) Geg.: $f_t(x) = \frac{e^x}{8 \cdot (t + x)^2}$, $t \in R$, $g(x) = \frac{1}{32} e^x$ Ges.: a) $T\left(2 - t; \frac{e^2}{32e^t}\right)$ b) $f_{Min} = g(x)$ c) h

a) $f_t'(x) = \frac{e^x \cdot 8 \cdot (t + x)^2 - e^x \cdot 16 \cdot (t + x)}{8 \cdot (t + x)^2} = \frac{e^x \cdot (x + t - 2)}{x + t}$ → $\frac{e^x \cdot (x + t - 2)}{x + t} = 0$ → $\underline{x_E = 2 - t}$

$f_t''(x) = \frac{(e^x \cdot (x + t - 2) + e^x) \cdot (x + t) - e^x \cdot (x + t - 2)}{(x + t)^2} = \frac{e^x \cdot (x^2 + 2xt - x + t^2 - t + 2)}{(x + t)^2}$

→ $f_t''(2 - t) = \frac{e^{2-t} \cdot (2 - t)^2 + 4}{2^2} > 0$ → Minimum und $f_t(2 - t) = \frac{e^{2-t}}{8 \cdot 2^2} = \frac{e^2}{32e^t}$ → $T\left(2 - t; \frac{e^2}{32e^t}\right)$

b) $x = 2 - t$ → $t = 2 - x$ → $y = \frac{e^2}{32e^{2-x}} = \frac{e^x}{32} = g(x)$

c) $\underline{\underline{h(x) = \frac{e^2}{32e^t}}}$

Extremwertprobleme:

1) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 9 - \frac{1}{5}x^2$. Die Punkte A(0; 0), B(x; f(x)), C(-x; f(-x)) bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, für welches x ($x > 0$) der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal wird und berechnen Sie A_{Max}!

→ $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ → $A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot f(x)$ → $A(x) = x \cdot (9 - \frac{1}{5}x^2) = 9x - \frac{1}{5}x^3$ (Zielfunktion)

→ $A'(x) = 9 - \frac{3}{5}x^2$ → $9 - \frac{3}{5}x^2 = 0$ → $\underline{\underline{x_E = \sqrt{15} \approx 3{,}873}}$

→ $A''(x) = -\frac{6}{5}x$ → $A''(\sqrt{15}) = -\frac{6}{5}\sqrt{15} < 0$ → Maximum

→ $A(\sqrt{15}) = \sqrt{15} \cdot (9 - \frac{1}{5} \cdot 15) = \underline{\underline{6\sqrt{15} \approx 23{,}238 FE}}$

2) Die Graphen der Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{8 \cdot x^2}$ und $g(x) = \dfrac{1}{8 \cdot e \cdot (x-1)^2}$ werden von Geraden $x = c$ ($c \in R$, $c > 1$) geschnitten. Ermitteln Sie den Wert für c, für den die Differenz der Funktionswerte $g(c) - f(c)$ minimal wird und geben Sie diese minimale Differenz an!

→ Zielfunktion: $d(c) = \dfrac{1}{8 \cdot e \cdot (c-1)^2} - \dfrac{1}{8 \cdot c^2}$

→ $d'(c) = \dfrac{-2}{8 \cdot e \cdot (c-1)^3} + \dfrac{2c}{8 \cdot c^3} = -\dfrac{1}{4 \cdot e \cdot (c-1)^3} + \dfrac{1}{4 \cdot c^3} = \dfrac{-c^3 + e(c-1)^3}{4 \cdot e \cdot (c-1)^3 \cdot c^3} = \dfrac{-c^3 + e(c^3 - c^2 + 3c - 1)}{4 \cdot e \cdot (c-1)^3 \cdot c^3}$

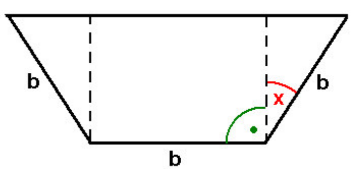
→ $\dfrac{-c^3 + e(c^3 - c^2 + 3c - 1)}{4 \cdot e \cdot (c-1)^3 \cdot c^3} = 0$ → $(e-1)c^3 - 3ec^2 + 3ec - e = 0$ → $\underline{\underline{c_E \approx 3{,}5277}}$

→ $d''(c) = \dfrac{3}{4 \cdot e \cdot (c-1)^4} - \dfrac{3}{4 \cdot c^4}$

→ $d''(3{,}5277) \approx 0{,}002 > 0$ → Minimum

→ $\underline{\underline{d(3{,}5277) \approx -0{,}0028}}$

3) Drei Bretter, die die gleiche Breite b haben, sollen zu einer Wasserrinne zusammengebaut werden, deren Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez ist.
Unter welchem Winkel müssen die Bretter zusammenstoßen, wenn das Fassungsvermögen maximal werden soll?



$A(x) = b \cdot b\cos x + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot b\cos x \cdot b\sin x) = b^2(\cos x + \cos x \cdot \sin x)$

$A'(x) = b^2(-\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x) = 0$ → $-\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

Subst. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ → $-\sin x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 0$

Subst. $\sin x = z$ → $2z^2 + z - 1 = 0$ → $z_1 = 0{,}5$ $z_2 = -1$

Rücksubst.: $\sin x = 0{,}5$ → $\underline{x_E = 30°}$

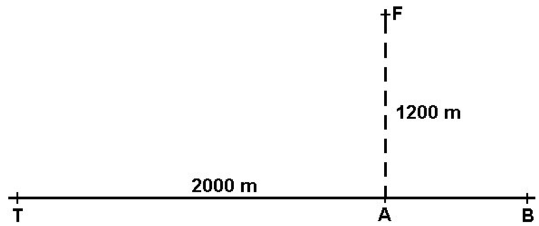
$\sin x = -1$ → $[x_E = 270°]$ entfällt

$A''(x) = b^2(-\cos x - 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x) = b^2(-\cos x - 4\sin x \cdot \cos x)$

$A''(30°) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3} \cdot b < 0$ → Maximum

→ **Die Bretter müssen unter einem Winkel von 120° zusammenstoßen.**

4) Ein Firmenneubau F soll durch ein Erdkabel an die nächstgelegene Trafostation T angeschlossen werden. Von T über A nach B verläuft eine Straße. F befindet sich abseits der Straße. (siehe Abbildung) Die Verlegungskosten längs der Straße betragen 150€/m, im unerschlossenen Gelände 250€/m. Berechnen Sie die Kosten, die entstehen, wenn die Verlegung des Kabels

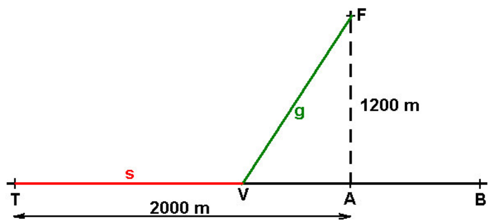


a) geradlinig von T nach F nur im Gelände,
b) von T nach A längs der Straße und dann geradlinig nach F im Gelände erfolgt!
c) Nach welcher Strecke sollte man die Straße verlassen, um die Kosten so gering wie möglich zu halten und wie hoch sind sie dann? (Auf den Nachweis des Extremums wird hier verzichtet!)

zu a) $\overline{TF} = \sqrt{2^2 + 1{,}2^2} \cdot 1000\text{m} \approx \underline{2332\text{m}}$ → Kosten: $2332 \cdot 250€ = \underline{\underline{583\text{T}€}}$

zu b) Kosten: $2000 \cdot 150€ + 1200 \cdot 250€ = 300\text{T}€ + 300\text{T}€ = \underline{\underline{600\text{T}€}}$

zu c)



s und g in 1000m

Kosten in €: $K(s,g) = s \cdot 150 + g \cdot 250$ (Zielfunktion)

Im Dreieck VAF gilt: $g = \sqrt{1{,}2^2 + (2-s)^2}$ (Nebenbedg.)

→ $K(s) = s \cdot 150 + \sqrt{1{,}2^2 + 4 - 4s + s^2} \cdot 250$

→ $K(s) = 150s + \sqrt{s^2 - 4s + 5{,}44} \cdot 250$

→ $K'(s) = 150 + \dfrac{250 \cdot (s-2)}{\sqrt{s^2 - 4s + 5{,}44}}$

$150 + \dfrac{250 \cdot (s-2)}{\sqrt{s^2 - 4s + 5{,}44}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{s^2 - 4s + 5{,}44}$ → $150\sqrt{s^2 - 4s + 5{,}44} = 500 - 250s \quad |:50$

→ $3\sqrt{s^2 - 4s + 5{,}44} = 10 - 5s$ | Quadrieren → $9 \cdot (s^2 - 4s + 5{,}44) = 100 - 100s + 25s^2$ → $16s^2 - 64s + 51{,}04 = 0$

→ [$s_1 = 2{,}9$] entfällt $s_2 = 1{,}1$ → Straße muss nach 1100m verlassen werden.

→ $g = \sqrt{1{,}2^2 + (2 - 1{,}1)^2} = \underline{1{,}5}$

→ Kosten: $1100 \cdot 150€ + 1500 \cdot 250€ = 165\text{T}€ + 375\text{T}€ = \underline{\underline{540\text{T}€}}$ → Einsparung um 43.000€