1. Grenzwertberechnung

Problem: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2+6}{e^{0,5x}}=?$

Lösung mittels **Regel(n) von L'HOSPITAL**:

Führt die Berechnung eines Grenzwertes auf einen unbestimmten Ausdruck der Form „$\frac{\infty}{\infty}$" oder „$\frac{0}{0}$", so gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{u'(x)}{v'(x)}$$

Damit lässt sich unser Ausgangsproblem wie folgt lösen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2+6}{e^{0,5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+14x}{0,5\cdot e^{0,5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x+14}{0,25\cdot e^{0,5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{0,125\cdot e^{0,5x}}=\underline{\underline{0}}$$

Bsp. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\underline{\underline{1}}$

Bsp. 3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x}{1}=\underline{\underline{-6}}$

Bsp. 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}[(5x^2-3x+4)\cdot e^{2x}]=?$

Zunächst sieht der Ausdruck so aus, als wenn die Voraussetzungen der Regel(n) von L'HOSPITAL nicht erfüllt sind, da kein Ausdruck der Form „$\frac{\infty}{\infty}$" oder „$\frac{0}{0}$" vorliegt.

Durch folgende Substitution lässt sich dies aber schnell ändern: $z=-x$ bzw. $x=-z$

→ $\lim\limits_{x\to -\infty}[(5x^2-3x+4)\cdot e^{2x}]=\lim\limits_{z\to\infty}[(5z^2+3z+4)\cdot e^{-2z}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{5z^2+3z+4}{e^{2z}}$ Wie man leicht sieht, sind nun die Voraussetzungen der Regel(n) von L'HOSPITAL erfüllt und es folgt:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{5z^2+3z+4}{e^{2z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{10z+3}{2\cdot e^{2z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{10}{4\cdot e^{2z}}=\underline{\underline{0}}$$

2. Tangentenproblematik

Bsp. 1) An den Graphen der Funktion $f(x)=(x^2-3)\cdot e^{0,5x}$ soll im Punkt B (-1; f(-1)) die Tangente gelegt werden. Die Gleichung der Tangente ist zu ermitteln.

Lösung:

1. Schritt: Berechnung des <u>Anstieges m</u> der Tangente, für den gilt: $m=f'(-1)$

Dazu muss zunächst die Ableitungsfunktion $f'(x)$ gebildet werden:

→ $f'(x)=2x\cdot e^{0,5x}+(x^2-3)\cdot 0,5\cdot e^{0,5x}=e^{0,5x}\cdot(0,5x^2+2x-1,5)$

→ $m=f'(-1)=e^{-0,5}\cdot(-3)=\underline{-\frac{3}{\sqrt{e}}}$

2. Schritt: Berechnung der <u>y-Koordinate</u> des Berührungspunktes → $f(-1)=-2\cdot e^{-0,5}=-\frac{2}{\sqrt{e}}$

3. Schritt: Berechnung des <u>Absolutgliedes n</u> in $f_T(-1)=m\cdot(-1)+n$

→ $-\frac{2}{\sqrt{e}}=-\frac{3}{\sqrt{e}}\cdot(-1)+n$ → $\underline{n=-\frac{5}{\sqrt{e}}}$

Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $\underline{\underline{f_T(x)=-\frac{3}{\sqrt{e}}x-\frac{5}{\sqrt{e}}}}$

Bsp. 2) An den Graphen der Funktion $f(x)=\frac{4x}{x^2-1}$ sollen Tangenten mit der Gleichung $f_t(x)=-2x+n_t$ gelegt werden. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind zu berechnen.

Lösung:

1. Schritt: Berechnung der Stellen, an denen der Funktionsgraph von f(x) den Anstieg -2 hat. Dazu muss zunächst die Ableitungsfunktion $f'(x)$ gebildet werden:

$\rightarrow f'(x)=\frac{4(x^2-1)-4x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2}$

$\rightarrow \frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2}=-2 \quad |\cdot(x^2-1)^2 \rightarrow -4x^2-4=-2\cdot(x^2-1)^2 \rightarrow -4x^2-4=-2\cdot(x^4-2x^2+1)$

$\rightarrow -4x^2-4=-2x^4+4x^2-2 \quad |+2x^4-4x^2+2 \rightarrow 2x^4-8x^2-2=0 \quad |:2 \rightarrow x^4-4x^2-1=0$

$\rightarrow$ Substitution $z=x^2$: $z^2-4z-1=0 \rightarrow z_1\approx 4{,}236 \quad [z_2\approx -0{,}236]$

$\rightarrow$ Rücksubstitution:

$\underline{x_1\approx\sqrt{4{,}236}\approx 2{,}058}$ $\quad \underline{x_2\approx-\sqrt{4{,}236}\approx -2{,}058}$

2. Schritt: Berechnung der y-Koordinaten $\rightarrow y_1\approx 2{,}544 \quad y_2\approx -2{,}544$

Damit ergeben sich folgende Berührungspunkte: $\underline{\underline{P_1(2{,}06;\ 2{,}54)}}$ $\quad \underline{\underline{P_2(-2{,}06;\ -2{,}54)}}$

3. Lokale Extrempunkte

Bsp. 1) $f(x)=e^{0{,}2x}\cdot(3x^2-5x-2)$

Lösung:

1. Schritt: Bilden der 1. Ableitungsfunktion

$\rightarrow f'(x)=0{,}2\cdot e^{0{,}2x}\cdot(3x^2-5x-2)+e^{0{,}2x}\cdot(6x-5)=e^{0{,}2x}\cdot(0{,}6x^2+5x-5{,}4)$

2. Schritt: Berechnen der Extremstellen

$\rightarrow e^{0{,}2x}\cdot(0{,}6x^2+5x-5{,}4)=0 \rightarrow 0{,}6x^2+5x-5{,}4=0 \rightarrow \underline{x_{E1}\approx 0{,}968} \quad \underline{x_{E2}\approx -9{,}3}$

3. Schritt: Bilden der 2. Ableitungsfunktion

$\rightarrow f''(x)=0{,}2\cdot e^{0{,}2x}\cdot(0{,}6x^2+5x-5{,}4)+e^{0{,}2x}(1{,}2x+5)=e^{0{,}2x}\cdot(0{,}12x^2+2{,}2x+3{,}92)$

4. Schritt: Feststellen der Art der Extrema

$\rightarrow f''(0{,}968)\approx 7{,}5>0 \rightarrow$ Minimum und $f''(-9{,}3)\approx -0{,}96<0 \rightarrow$ Maximum

5. Schritt: Berechnen der y-Koordinaten der Extrempunkte

$\rightarrow f(0{,}968)\approx -4{,}92$ und $f(-9{,}3)\approx 47{,}32$

Damit ergeben sich folgende Extrempunkte: $\underline{\underline{T(0{,}97;\ -4{,}92)}}$ $\quad \underline{\underline{H(-9{,}3;\ 47{,}32)}}$

Bsp. 2) $f(x)=\sin^2 x$ mit $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Lösung:

1. Schritt: Bilden der 1. Ableitungsfunktion

$\rightarrow f'(x)=\cos x\cdot 2\cdot\sin x$

2. Schritt: Berechnen der Extremstellen

$\rightarrow 2\cdot\cos x\cdot\sin x=0 \rightarrow \cos x=0$ oder $\sin x=0 \rightarrow \underline{x_{E1}=-\frac{\pi}{2}} \quad \underline{x_{E2}=\frac{\pi}{2}} \quad \underline{x_{E3}=0}$

3. Schritt: Bilden der 2. Ableitungsfunktion

$\rightarrow f''(x)=2\cdot(-\sin^2 x+\cos^2 x)$

4. Schritt: Feststellen der Art der Extrema

$\rightarrow f''(-\frac{\pi}{2})=-2<0 \rightarrow$ Maximum $\quad f''(0)=2>0 \rightarrow$ Minimum $\quad f''(\frac{\pi}{2})=-2<0 \rightarrow$ Maximum

5. Schritt: Berechnen der y-Koordinaten der Extrempunkte

$\rightarrow f(-\frac{\pi}{2})=1 \quad f(0)=0 \quad f(\frac{\pi}{2})=1$

Damit ergeben sich folgende Extrempunkte: $\underline{\underline{H(-\frac{\pi}{2};1)}}$ $\quad \underline{\underline{T(0;\ 0)}}$ $\quad \underline{\underline{H(\frac{\pi}{2};\ 1)}}$

4. Wendepunkte

Bsp.: $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

Lösung:

1. Schritt: Bilden der 1. und 2. Ableitungsfunktion

→ $f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(-x^2+2x)}{e^{2x}}=\frac{-x^2+2x}{e^x}$

→ $f''(x)=\frac{(-2x+2)\cdot e^x-(-x^2+2x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(x^2-4x+2)}{e^{2x}}=\frac{x^2-4x+2}{e^x}$

2. Schritt: Berechnen der Wendestellen

→ $\frac{x^2-4x+2}{e^x}=0$ → $x^2-4x+2=0$ → $\underline{x_{W1}\approx 3{,}414}$ $\underline{x_{W2}\approx 0{,}586}$

3. Schritt: Bilden der 3. Ableitungsfunktion

→ $f'''(x)=\frac{(2x-4)\cdot e^x-(x^2-4x+2)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(-x^2+6x-6)}{e^{2x}}=\frac{-x^2+6x-6}{e^x}$

4. Schritt: Prüfen der hinreichenden Bedingung

→ $f'''(3{,}414)\approx 0{,}093\neq 0$ → Wendestelle

→ $f'''(0{,}586)\approx -1{,}574\neq 0$ → Wendestelle

5. Schritt: Berechnen der y-Koordinaten der Wendepunkte

→ $f(3{,}414)\approx 0{,}384$ und $f(0{,}586)\approx 0{,}191$

Damit ergeben sich folgende Wendepunkte: $\underline{\underline{W_1(3{,}414;\ 0{,}384)}}$ $\underline{\underline{W_2(0{,}586;\ 0{,}191)}}$

5. Parameterhaltige Funktionen

Bsp.: $f_a(x)=e^{ax}\cdot(x+1)$ mit $a\neq 0$ ges.: a) Extrempunkte, b) Wendepunkte

a) Lösung:

1. Schritt: Bilden der 1. Ableitungsfunktion

→ $f_a'(x)=a\cdot e^{ax}\cdot(x+1)+e^{ax}=e^{ax}\cdot(ax+a+1)$

2. Schritt: Berechnen der Extremstellen

→ $e^{ax}\cdot(ax+a+1)=0$ → $ax+a+1=0$ → $\underline{x_E=-1-\frac{1}{a}}$

3. Schritt: Bilden der 2. Ableitungsfunktion

→ $f_a''(x)=a\cdot e^{ax}\cdot(ax+a+1)+e^{ax}\cdot a=a\cdot e^{ax}\cdot(ax+a+2)$

4. Schritt: Feststellen der Art der Extrema

→ $f_a''(-1-\frac{1}{a})=\frac{a}{e^{a+1}}$

→ $a>0$: $\frac{a}{e^{a+1}}>0$ → Minimum

→ $a<0$: $\frac{a}{e^{a+1}}<0$ Maximum

5. Schritt: Berechnen der y-Koordinaten der Extrempunkte

→ $f_a(-1-\frac{1}{a})=-\frac{1}{a\cdot e^{a+1}}$

Damit ergeben sich folgende Extrempunkte:

für $a>0$: $\underline{\underline{T_a(-1-\frac{1}{a};\ -\frac{1}{a\cdot e^{a+1}})}}$ und für $a<0$: $\underline{\underline{H_a(-1-\frac{1}{a};\ -\frac{1}{a\cdot e^{a+1}})}}$

b) Lösung:

1. Schritt: Berechnen der Wendestelle(n)

→ $f_a''(x) = a \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + 2)$ → $a \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + 2) = 0$ → $\underline{x_W = -1 - \frac{2}{a}}$

2. Schritt: Bilden der 3. Ableitungsfunktion

→ $f_a'''(x) = a^2 \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + 2) + a \cdot e^{ax} \cdot a = a^2 \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + 3)$

3. Schritt: Prüfen der hinreichenden Bedingung

→ $f_a'''(-1 - \frac{2}{a}) = \frac{a^2}{e^{a+2}} \neq 0$ da $a \neq 0$ → Wendestelle

4. Schritt: Berechnen der y-Koordinate des Wendepunktes

→ $f_a(-1 - \frac{2}{a}) = -\frac{2}{a \cdot e^{a+2}}$

Damit ergibt sich folgender Wendepunkt: $\underline{\underline{W_a(-1 - \frac{2}{a};\, -\frac{2}{a \cdot e^{a+2}})}}$

6. Extremwertaufgaben

Bsp.: Es sollen zylinderförmige Blechdosen mit einem Volumen von a cm³ ($a > 0$) hergestellt werden. Wie groß müssen Radius r und Höhe h gewählt werden, damit der Blechverbrauch möglichst klein ist? (Die Blechstärke bleibt unberücksichtigt!)

(1) Analyse der Aufgabe:

Geg.: Volumen des Zylinders $V = a\,cm^3$

Ges.: r, h (Für den Fall minimaler Oberfläche A_O)

(2) Aufstellen der Funktion mit Extremalbedingung (**Zielfunktion**):

$A_O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

(3) Angabe der **Nebenbedingung(en)**:

$V = a = \pi r^2 h$ → $\underline{h = \frac{a}{\pi r^2}}$

(4) Einsetzen der Nebenbedingung(en) in die Zielfunktion:

$A_O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2a}{r}$

(5) Festlegen des Definitionsbereiches:

$0 < r < a$

(6) Bestimmen der lokalen Extremstelle(n) der Zielfunktion aus Gleichung (4):

$A_O'(r) = 4\pi r - \frac{2a}{r^2}$ → $4\pi r - \frac{2a}{r^2} = 0 \;|\cdot r^2$ → $4\pi r^3 - 2a = 0$ → $\underline{\underline{r_E = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}}$

(7) Bestimmen der Art der Extremstelle

$A_O''(r) = 4\pi + \frac{4a}{r^3}$ → $A_O''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}\right) = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$ → Minimum

(8) Berechnung weiterer gesuchter Größen:

$$h_E = \frac{a}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}{\pi \cdot \frac{a}{2\pi}} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}} = \underline{\underline{2 \cdot r_E}}$$

→ Höhe und Durchmesser eines Zylinders müssen also gleich groß sein, wenn der Oberflächeninhalt des Zylinders bei gegebenem Volumen möglichst klein werden soll.