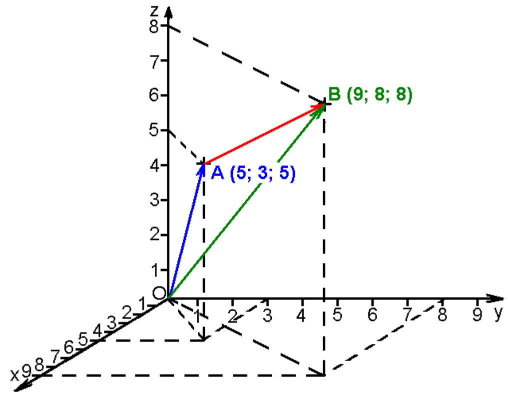
Jedem Punkt P (x; y; z) im Raum (R^3) wird eineindeutig ein **Ortsvektor** $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zugeordnet.

In nebenstehender Abbildung wird z.B. dem Punkt A (5; 3; 5) der Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und dem Punkt B (9; 8; 8) der Ortsvektor $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ zugeordnet.



Den entstehenden Vektor $\overrightarrow{AB}$ kann man wie folgt berechnen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-5 \\ 8-3 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}}$

In Worten: Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist die Differenz aus dem Ortsvektor des Punktes B und dem Ortsvektor des Punktes A

Rechnen mit Vektoren:

Addition zweier Vektoren: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) \\ -4+(-2) \\ 5+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}}}$

Subtraktion zweier Vektoren: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -4-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (Vielfaches eines Vektors):

$$-\tfrac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tfrac{4}{3} \cdot (-3) \\ -\tfrac{4}{3} \cdot 6 \\ -\tfrac{4}{3} \cdot 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix}}}$$

Länge (Betrag) eines Vektors:

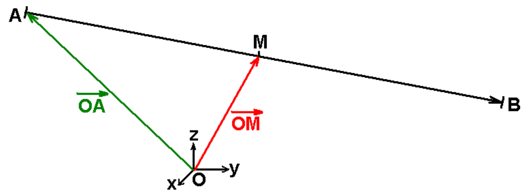
Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ → Länge (Betrag): $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{74} \approx \underline{\underline{8{,}60\text{LE}}}$

Anwendungen:

1. Mittelpunkt einer Strecke:

geg.: A (-5; -2; 4) und B (3; -4; -6) ges.: M Mittelpunkt von $\overline{AB}$

Skizze:

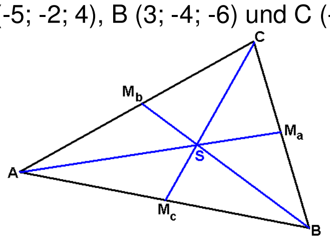


Lsg.: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}} \rightarrow \underline{\underline{M\,(-1; -3; -1)}}$

2. Schwerpunkt eines Dreiecks:

geg.: A (-5; -2; 4), B (3; -4; -6) und C (-1; 3; 0) ges.: S Schwerpunkt von ΔABC

Skizze:



Es gilt:
S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1

Lsg.:

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_C} \rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}}$

$\rightarrow \underline{\underline{S\,(-1; -1; -\frac{2}{3})}}$

→ Koordinaten des Schwerpunktes sind arithmetisches Mittel der Eckpunktkoordinaten!

3. Umfang eines Dreiecks:

geg.: A (-5; -2; 4), B (3; -4; -6) und C (-1; 3; 0) ges.: Umfang u von ΔABC

Lsg.: $u = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| \approx \underline{\underline{30{,}56LE}}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+4+100} = \sqrt{168} \approx \underline{12{,}96LE}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+49+36} = \sqrt{101} \approx \underline{10{,}05LE}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+25+16} = \sqrt{57} \approx \underline{7{,}55LE}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren:

Def.: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Berechnung: $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 20 - 4 + 6 = \underline{\underline{22}}$

Anwendung: Mit Hilfe des Skalarproduktes lässt sich der **Winkel** zwischen zwei Vektoren berechnen.

Bsp. 1: α - Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-20 - 3 + 10}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{42}} = \frac{-13}{\sqrt{1596}} \approx -0{,}3254 \rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 109{,}0°}}$$

Bsp. 2: β - Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-8 + 3 + 5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\beta = 90°}}$$

→ Merke:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann Null, wenn beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen!

Das Vektorprodukt zweier Vektoren:

Def.: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

Berechnung:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3 \\ -12+10 \\ 5+16 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 21 \end{pmatrix}}}$

Anwendung: Mit Hilfe des Vektorproduktes lässt sich berechnen:
1) ein Vektor, der auf der von zwei Vektoren aufgespannten Fläche senkrecht steht und
2) der Flächeninhalt des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Bsp. 1: Vektor $\vec{n}$, der auf der von den Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Fläche senkrecht steht

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 17 \\ 33 \\ -7 \end{pmatrix}}}$$

Bsp. 2: Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms

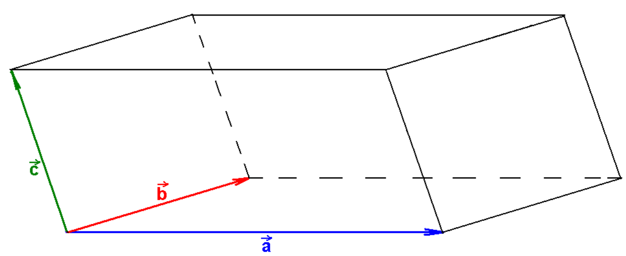
$$A = \left|\begin{pmatrix} 17 \\ 33 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{17^2 + 33^2 + 49} \approx \underline{\underline{37{,}8\,\text{FE}}}$$

Das Spatprodukt zweier Vektoren:

Def.: $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ heißt Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$

Anwendung:
Der Betrag des Spatproduktes ist ein Maß für das **Volumen** des durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten **Spates**.

Den Körper, dessen Seitenflächen Parallelogramme sind, nennt man auch **Parallelepiped**.



Bsp.: Volumen des durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates

Lsg.: $V = \left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$

NR: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$V = \left|\begin{pmatrix} -28 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = |112 + 26 + 16| = \underline{\underline{154\,\text{VE}}}$$