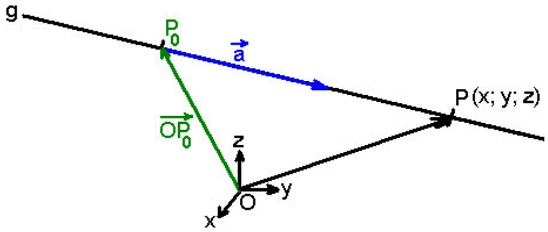
Geraden im Raum (R^3 **)**

Eine Gerade kann als Punktmenge aufgefasst werden, die bestimmte Bedingungen erfüllen muss.
Da jedem Punkt im R^3 eineindeutig ein Ortsvektor zugeordnet werden kann, ist somit eine Gerade eine Menge von Ortsvektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Um nun eindeutig eine bestimmte Gerade mathematisch zu beschreiben, benötigt man folgende zwei Elemente:

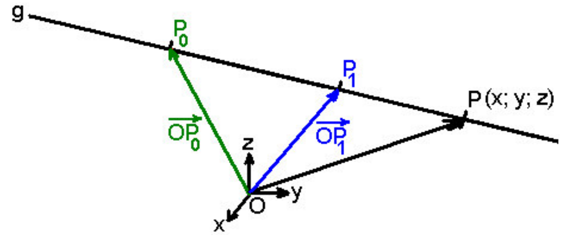
a) einen Punkt P_0 mit dem zugeh. Ortsvektor und einen Richtungsvektor $\vec{a}$



Punkt-Richtungs-Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{a}$$

b) zwei Punkte P_0 und P_1 mit den zugehörigen Ortsvektoren



Zwei -Punkte-Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right)$$

Der Parameter **t** mit $t \in R$ ist notwendig, um alle unendlich vielen Punkte P(x; y; z) der Geraden darzustellen.
Für $t = 0$ ergibt sich z.B. der Punkt P_0; für $t < 0$ Punkte, die links von P_0 und für $t > 0$ Punkte, die rechts von P_0 auf der Geraden g liegen.
Bsp.:

geg.: A (2; -4; 5) und $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

→ Gleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

geg.: A (1; 3; -2) und B (4; -1; 3)

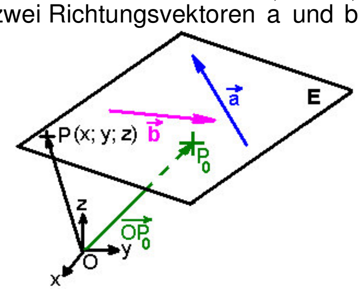
→ Gleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ebenen im Raum (R^3 **)**

Auch eine Ebene kann als Punktmenge aufgefasst werden, die bestimmte Bedingungen erfüllen muss. Da jedem Punkt im R^3 eineindeutig ein Ortsvektor zugeordnet werden kann, ist somit auch eine Ebene eine Menge von Ortsvektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Um nun eindeutig eine bestimmte Ebene mathematisch zu beschreiben, benötigt man folgende drei Elemente:

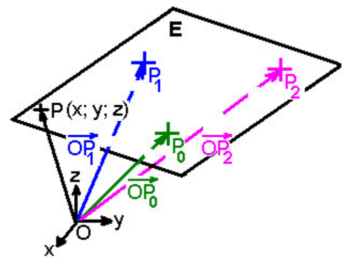
a) einen Punkt P_0 mit dem zugeh. Ortsvektor und zwei Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Punkt-Richtungs-Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{r} \cdot \vec{a} + \mathbf{s} \cdot \vec{b}$$

b) drei Punkte P_0, P_1 und P_2, mit den zugehörigen Ortsvektoren



Drei-Punkte-Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{r} \cdot \left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right) + \mathbf{s} \cdot \left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}\right)$$

Die **Parameter r** und **s** mit $r, s \in R$ sind notwendig, um alle unendlich vielen Punkte P(x; y; z) der Ebene darzustellen.

Bsp.:

geg.: A (2; -4; 5) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

→ $E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

geg.: A (1; 3; -2), B (4; -1; 3) und C (-2; 3; -1)

→ $E_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diese Form der Ebenengleichung nennt man **parameterhaltige** Form oder **Vektorform**.

Außerdem gibt es noch parameterfreie Formen, die auch **Koordinatenformen** genannt werden. Die einfachste dieser Koordinatenformen ist die **Allgemeine Form** einer Ebenengleichung:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ mit } A, B, C, D \in R$$

Um die Allgemeine Form aus der Vektorform zu berechnen, sollte man wissen, dass die Werte A, B und C in dieser Reihenfolge einen Vektor ergeben, der auf der Ebene **senkrecht** steht. Man nennt diesen Vektor **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Wir erinnern uns, dass gerade das Vektorprodukt zweier Vektoren einen Vektor liefert, der auf jedem der beiden Vektoren und damit auf der Ebene, in der beide Vektoren liegen, senkrecht steht. Für unser obiges Beispiel der Ebene E_1 würde sich also folgender Normalenvektor ergeben:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ → $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ → $\underline{\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}}$ → $E_1: 3x - 6y + 5z + D = 0$ Um nun noch D zu berechnen, setzen wir einfach die Koordinaten des gegebenen Punktes A in unsere Gleichung E_1 ein:

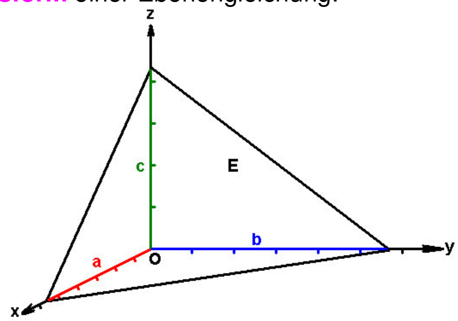
A in $E_1: 3 \cdot 2 - 6 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 + D = 0$ → $\underline{D = -55}$

→ Damit erhalten wir unsere Ebenengleichung für E_1 in Allgemeiner Form: $\underline{\underline{3x - 6y + 5z - 55 = 0}}$

Eine zweite Koordinatenform ist die **Achsenabschnittsform** einer Ebenengleichung:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, wobei a, b und c in dieser Reihenfolge die Abschnitte auf der x-, y- und z-Achse sind, wo die Ebene die Achsen schneidet.

→
Anhand dieser Form erkennt man die Lage der Ebene im Raum am besten.



Um die Achsenabschnittsform einer Ebenengleichung zu bilden, geht man am einfachsten von der Allgemeinen Form aus.

Bsp.: $3x-6y+5z-55=0$ → $|+55$ → $3x-6y+5z=55$ → $|:55$ → $\frac{3}{55}x-\frac{6}{55}y+\frac{1}{11}z=1$

→ Achsenabschnittsform $\frac{x}{\frac{55}{3}}+\frac{y}{-\frac{55}{6}}+\frac{z}{11}=1$ mit $a=\frac{55}{3}\approx 18{,}3$ $b=-\frac{55}{6}\approx -9{,}2$ $c=11$

Die dritte Koordinatenform ist die **HESSEsche Normalform** (kurz: HNF) einer Ebenengleichung.
Dazu teilt man die Allgemeine Form der Ebenengleichung durch den Betrag des Normalenvektors:

$Ax+By+Cz+D=0 \quad |:\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ → $\boxed{\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0}$

Bsp.: $3x-6y+5z-55=0 \; |:\sqrt{3^2+6^2+5^2}$ → $\frac{3x-6y+5z-55}{\sqrt{70}}=0$

Die HNF einer Ebene wird angewandt bei der Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene.
Aber dazu später.