**Übersicht über mögliche Lagebeziehungen**

| Punkt P–Gerade g | Punkt P-Ebene E | Gerade $g_1$-Gerade $g_2$ | Gerade g–Ebene E | Ebene $E_1$-Ebene $E_2$ |
|---|---|---|---|---|
| - $P \in g$<br>- $P \notin g$ | - $P \in E$<br>- $P \notin E$ | - $g_1$ windschief zu $g_2$<br>- $g_1$ schneidet $g_2$<br>- $g_1 \parallel g_2$<br>- $g_1 \equiv g_2$ | - g schneidet E<br>- $g \parallel E$<br>- $g \subset E$ | - $E_1$ schneidet $E_2$<br>- $E_1 \parallel E_2$<br>- $E_1 \equiv E_2$ |

**Lagebeziehungen Punkt P – Gerade g**

Punkt P liegt genau dann auf Gerade g ($P \in g$), falls der Ortsvektor des Punktes P die Geradengleichung von g erfüllt.

Bsp. 1) P(1; 2; -2) und g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wahre Aussage für $t = -1$ → $\underline{\underline{P \in g}}$

Bsp. 2) P(1; 2; -3) und g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ falsche Aussage für alle $t \in R$ → $\underline{\underline{P \notin g}}$

**Lagebeziehungen Punkt P – Ebene E**

Punkt P liegt genau dann in Ebene E ($P \in E$), falls der Ortsvektor des Punktes P die Ebenengleichung von E erfüllt.

Bsp. 1) P(-1; 1; 3) und E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wahre Aussage für $r = 1$ und $s = -1$ → $\underline{\underline{P \in E}}$

Bsp. 2) P(1; 1; 3) und E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $\begin{array}{l|l} \text{I)}\ 1 = 1 + 2s & \to s = 0 \\ \text{II)}\ 1 = 2r + s & \\ \text{III)}\ 3 = 2 + 2r & \to r = 0{,}5 \end{array}$ in II) $1 = 2$ falsche Aussage → $\underline{\underline{P \notin E}}$

**Lagebeziehungen Gerade $g_1$ -- Gerade $g_2$**

1. Schritt: Überprüfung der linearen Abhängigkeit der beiden Richtungsvektoren

A) Falls Richtungsvektoren linear **unabhängig** sind:
Annahme, dass sich $g_1$ und $g_2$ schneiden → Geraden gleich setzen (Gleichungssystem GS)
a) Wenn das GS eine Lösung hat → Geraden schneiden sich
b) Wenn das GS keine Lösung hat → Geraden verlaufen windschief zueinander

B) Falls Richtungsvektoren linear **abhängig** sind:
a) Wenn Punkt $P_1$ der Geraden $g_1$ die Gleichung der Geraden $g_2$ erfüllt oder umgekehrt → $\boxed{g_1 \equiv g_2}$
b) Wenn Punkt $P_1$ der Geraden $g_1$ die Gleichung der Geraden $g_2$ nicht erfüllt oder umgekehrt → $\boxed{g_1 \parallel g_2}$

Bsp. 1) $g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ falsche Aussage für alle $k \in R$ → Richtungsvektoren sind linear unabhängig

→ Annahme, dass sich $g_1$ und $g_2$ schneiden

$$\rightarrow \left.\begin{array}{lrl} \text{I)} & 2-2r & = 3+5s \\ \text{II)} & -1+1{,}5r & = 5+3s \\ \text{III)} & 1+r & = 2-s \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{lrl} \text{I)} & -2r-5s & = 1 \\ \text{II)} & 1{,}5r-3s & = 6 \\ \text{III)} & r+s & = 1 \end{array}\right| \text{GTR:} \rightarrow r=2 \text{ und } s=-1 \rightarrow \underline{\underline{g_1 \text{ schneidet } g_2}}$$

→ r in $g_1$ oder s in $g_2$ einsetzen: → Schnittpunkt $\underline{\underline{S(-2;2;3)}}$

Bsp. 2) $g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ falsche Aussage für alle $k \in R$ → Richtungsvektoren sind linear unabhängig

→ Annahme, dass sich $g_1$ und $g_2$ schneiden

$$\rightarrow \left.\begin{array}{lrl} \text{I)} & 2-2r & = 3+2s \\ \text{II)} & -1+1{,}5r & = 5+4s \\ \text{III)} & r & = 2-s \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{lrl} \text{I)} & -2r-2s & = 1 \\ \text{II)} & 1{,}5r-4s & = 6 \\ \text{III)} & r+s & = 2 \end{array}\right| \text{GTR:} \rightarrow \text{keine Lösung} \rightarrow \underline{\underline{g_1 \text{ windschief } g_2}}$$

Bsp. 3) $g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ wahre Aussage für $k=-0{,}5$ → Richtungsvektoren sind linear abhängig

→ Annahme, dass sich $P_1$ auf $g_2$ liegt

$$\rightarrow \left.\begin{array}{lrl} \text{I)} & 2 & = 3+4s \\ \text{II)} & -1 & = 5-3s \\ \text{III)} & 1 & = 2-2s \end{array}\right| \rightarrow \text{keine Lösung} \rightarrow \underline{\underline{g_1 \parallel g_2}}$$

**Lagebeziehungen Gerade g – Ebene E:**

1. Schritt: Bilden des Skalarproduktes aus Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene

A) Skalarpodukt $\neq 0$ → $\underline{\underline{g \text{ schneidet } E}}$

B) Skalarpodukt $= 0$:

a) Wenn Punkt $P$ der Ebene E die Gleichung der Geraden g erfüllt → $\underline{\underline{g \subset E}}$

b) Wenn Punkt $P$ der Ebene E die Gleichung der Geraden g nicht erfüllt → $\underline{\underline{g \parallel E}}$

Beispiele: geg.: E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ → $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ → E: $7x + 3y - z - 9 = 0$

$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad g_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1) Lagebeziehung zwischen $g_1$ und E: → $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 23 \neq 0$ → $\underline{\underline{g_1 \text{ schneidet } E}}$

2) Lagebeziehung zwischen $g_2$ und E: → $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

→ $P_2$ (2; -1; 2) in E: $7 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 2 - 9 = 0$ wahre Aussage

→ $\underline{\underline{g_2 \subset E}}$

3) Lagebeziehung zwischen $g_3$ und E: → $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

→ $P_3$ (2; -1; 3) in E: $7 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 3 - 9 = 0$ falsche Aussage

→ $\underline{\underline{g_3 \parallel E}}$

**Lagebeziehungen Ebene $E_1$ – Ebene $E_2$:**

1. Schritt: Ermitteln beider Normalenvektoren

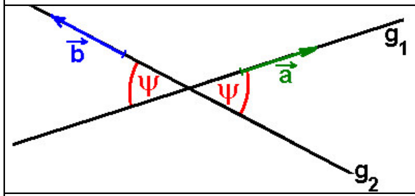
A) Normalenvektoren sind linear unabhängig → $\underline{\underline{E_1 \text{ schneidet } E_2}}$

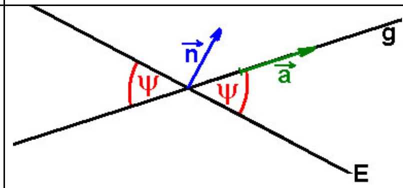
B) Normalenvektoren sind linear abhängig

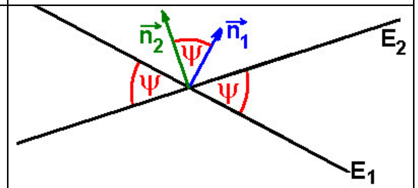
a) Wenn Punkt $P_1$ der Ebene $E_1$ die Gleichung der Ebene $E_2$ erfüllt oder umgekehrt → $\underline{\underline{E_1 \equiv E_2}}$

b) Wenn Punkt $P_1$ der Ebene $E_1$ die Gleichung der Ebene $E_2$ <u>nicht</u> erfüllt oder umgekehrt → $\underline{\underline{E_1 \parallel E_2}}$

**Schnittwinkel**

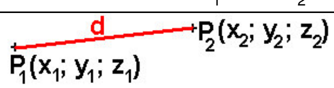
<table>
<tr><th>Zweier Geraden</th><th>Gerade und Ebene</th><th>Zweier Ebenen</th></tr>
<tr><td>


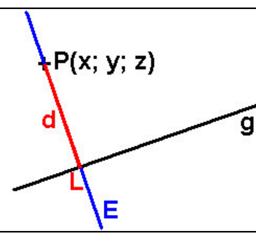
</td><td>


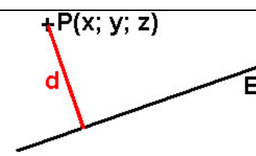
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$\cos\psi = \frac{\left\lvert \vec{a}\circ\vec{b}\right\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$</td><td>$\sin\psi = \frac{\left\lvert \vec{a}\circ\vec{n}\right\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$</td><td>$\cos\psi = \frac{\left\lvert \vec{n_1}\circ\vec{n_2}\right\rvert}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}$</td></tr>
<tr><td>
Beispiel:<br>
$g_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$<br>
$g_2: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$<br>
→ $\cos\psi = \frac{\left\lvert\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{9}}$<br>
$= \frac{\lvert -9\rvert}{3\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}5883$ → $\underline{\underline{\psi \approx 54{,}0°}}$
</td><td>
Beispiel:<br>
$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$<br>
$E: 3x - 2y + z - 4 = 0$<br>
→ $\sin\psi = \frac{\left\lvert\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{14}}$<br>
$= \frac{\lvert 7\rvert}{\sqrt{26\cdot 14}} \approx 0{,}3669$<br>
→ $\underline{\underline{\psi \approx 21{,}5°}}$
</td><td>
Beispiel:<br>
$E_1: x + 3y - 5z - 4 = 0$<br>
$E_2: 3x - 2y + z - 4 = 0$<br>
→ $\cos\psi = \frac{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{14}}$<br>
$= \frac{\lvert -8\rvert}{\sqrt{35\cdot 14}} \approx 0{,}3614$<br>
→ $\underline{\underline{\psi \approx 68{,}8°}}$
</td></tr>
</table>

**Abstände:**

<table>
<tr><th>Zweier Punkte $P_1$ und $P_2$</th><th>Punkt P – Gerade g</th><th>Punkt P – Ebene E</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$</td><td>Hilfsebene E $\perp$ g<br>→ $E \cap g = \{L\}$ → $d = \overline{PL}$</td><td>Koordinaten von P in hessesche Normalform (HNF) von E einsetzen → d</td></tr>
<tr><td>
Beispiel:<br>
$P_1$ (3; -1; 2) und $P_2$ (-2; -4; -3)<br>
→ $d = \sqrt{5^2 + 3^2 + 5^2}$<br>
→ $d = \underline{\underline{\sqrt{59} \approx 7{,}68LE}}$
</td><td>
Beispiel:<br>
P(3; 0; -2) und<br>
$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$<br>
→ E: $2y - z + D = 0$<br>
→ (3; 0; -2) in E: $2 + D = 0$ → $D = -2$<br>
→ E: $2y - z - 2 = 0$<br>
→ g in E: $2(-1 + 2t) - (3 - t) - 2 = 0$<br>
→ $t = 1{,}4$ → t in g: → L(2; 1,8; 1,6)<br>
→ $d = \sqrt{1 + 1{,}8^2 + 3{,}6^2} \approx \underline{\underline{4{,}15LE}}$
</td><td>
Beispiel:<br>
P(3; 0; -2) und<br>
E: $4x - 2y + z - 3 = 0$<br>
→ HNF von:<br>
$\frac{4x - 2y + z - 3}{\sqrt{21}} = 0$<br>
→ $d = \frac{4\cdot 3 - 2\cdot 0 - 2 - 3}{\sqrt{21}}$<br>
→ $d = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{21}} \approx 1{,}53LE}}$
</td></tr>
</table>