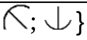
Ziele: 1) Erfassung und Untersuchung des real existierenden Zufalls mit mathematischen Mitteln.
2) In Situationen der zufallbedingten Ungewissheit vernünftig handeln zu lernen.

Zufallsexperiment: Vorgänge, die man unter gleichen Bedingungen beliebig oft durchführen kann und deren Ergebnisse dem Zufall unterliegen.

Bsp. für Zufallsexperimente	**Ergebnismenge Ω**
1) Werfen einer Münze → oben liegende Seite	$\Omega = \{W; Z\}$
2) Werfen eines Würfels → oben liegende Augenzahl	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
3) Werfen einer Reißzwecke → Lage	$\Omega = \{$  $\}$
4) Beliebige Seite eines Buches → 1. Buchstabe	$\Omega = \{\text{alle Buchstaben des Alphabetes}\}$
5) Überqueren einer Kreuzung → Ampelfarbe	$\Omega = \{\text{Rot; Grün; Gelb}\}$
6) Stichprobe → Qualität	$\Omega = \{\text{i.O.; fehlerhaft}\}$

Ereignis: Jede Teilmenge der Ergebnismenge (bestimmtes Beobachtungsziel)
Bsp. zu 2): Ereignis A – Augenzahl ungerade → A = {1; 3; 5 }
Ereignis B – Augenzahl ist Primzahl → B = {2; 3; 5 }

Spezielle Ereignisse:
- Elementarereignis (atomares Ereignis) → enthält genau ein Element aus Ω, z.B. E = {6}
- sicheres Ereignis → tritt immer ein, z.B. Ereignis S – Augenzahl ist < 7 → S = Ω
- unmögliches Ereignis → tritt nie ein, z.B. Ereignis U – Augenzahl ist > 6 → U = Ø
- das zu einem Ereignis E entgegengesetzte Ereignis $\overline{E}$, z.B. E – Augenzahl gerade → $\overline{E}$ – Augenz. unger.

Häufigkeiten:

Absolute Häufigkeit $H_n(E)$ - gibt an, wie oft das Ereignis E bei n gleichen Zufallsexperimenten aufgetreten ist

Relative Häufigkeit $h_n(E)$ - gibt das Verhältnis von absoluter Häufigkeit zu n an → $h_n(E) = \frac{H_n(E)}{n}$

Bsp.: Von 29 befragten Schülern einer Klasse haben 5 die Schuhgröße 37
→ Ereignis S_{37} - befragter Schüler hat Schuhgröße 37

→ absolute Häufigkeit: $H_{29}(S_{37}) = 5$ → relative Häufigkeit $h_{29}(S_{37}) = \frac{5}{29} \approx 0{,}172 = 17{,}2\%$

Stabilwerden relativer Häufigkeiten:

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt, dann stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten für jedes Ergebnis. Den Wert, um den sich die rel. Häufigkeit eines Ergebnisses einpendelt, nennt man die **Wahrscheinlichkeit P** dieses Ergebnisses.

→ **Empirisches Gesetz der „Großen Zahlen“**: Für hinreichend großes n gilt $h_n(E) \approx P(E)$

Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit:

Hat ein bestimmtes Ergebnis eines Zufallsversuches die Wahrscheinlichkeit P(E)=p, dann wird das Ergebnis nach einer großen Zahl von n Versuchen ungefähr $n \cdot p$ auftreten.

Bsp.: Der Buchstabe **e** kommt in einem beliebigen Text mit einer Wahrscheinlichkeit von 18,1% vor.
→ In einem Text mit insgesamt 3850 Buchstaben kommt der Buchstabe e ungefähr $0{,}181 \cdot 3850 \approx 697$ mal vor.

LaPLACE-Experiment: Zufallsexperiment, das endlich viele Ergebnisse hat, und bei dem alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind.
z.B. Wurf einer idealen Münze, eines idealen Würfels

Wahrscheinlichkeit in einem LaPLACE-Experiment:

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|\Omega|}}$$

Bsp. Wahrscheinlichkeit, eine Zahl > 4 zu würfeln:

E = {5; 6} → $|E| = 2$ → $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Anwendungen:

1. Um die Größe einer Ameisenkolonie zu schätzen, wurden 400 Ameisen eingefangen und markiert. Nachdem sich die Tiere wieder gut vermischt haben, wurden 310 Ameisen zurückgefangen. 51 von diesen waren markiert. Wie viele Ameisen leben ungefähr in dieser Kolonie?

Geg.: Ereignis M – Ameise ist markiert → $h_{310}(M)=\frac{51}{310}\approx 0{,}1645$ und $P(M)=\frac{400}{x}$ Ges.: x

Lsg.: lt Gesetz der „Großen Zahlen“ gilt: $h_{310}(M)\approx P(M)$ → $\frac{51}{310}=\frac{400}{x}$ → $\underline{\underline{x\approx 2431}}$

2. Auf einem Rummel werden zwei Würfelbuden aufgestellt. Bei der einen erhält man einen Gewinnpunkt, wenn der Wurf mit zwei Würfeln eine Primzahl ergibt, bei der anderen gibt es den Gewinnpunkt, wenn die Augensumme ungerade ist. Wo sind die Gewinnchancen größer? Begründe!

Geg.: Ergebnismenge $\Omega=\{2;\ 3;\ 4;\ldots 11;\ 12\}$

Gewinnpunkt bei Würfelbude 1: $G_1=\{2;3;\ 5;\ 7;\ 11\}$

Gewinnpunkt bei Würfelbude 2: $G_1=\{3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11\}$

Vermutung: $P(G_1)=P(G_2)$ ist falsch!

da {2} nur durch 1|1 aber {9} durch 3|6 und 4|5 → kein LAPLACE-Experiment → $P(G_1)<P(G_2)$

3. Peter hat einen dunklen und einen hellen Papagei. Susi besucht Peter.
Dialoge: (1) Susi: Ist ein Papagei ein Männchen? Peter: Ja.
(2) Susi: Ist der dunkle Papagei ein Männchen? Peter: Ja.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach (1) bzw. (2) dafür, dass beide Papageien Männchen sind?

Lsg.: Ergebnismenge $\Omega=\{MM;\ MW;\ WM;\ WW\}$ Ereignis E – 2 Männchen → E={MM} → $P(E)=\frac{1}{4}$

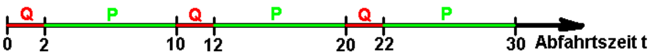
Dialog (1) → $\Omega_1=\{MM;\ MW;\ WM\}$ → $\underline{\underline{P(E)=\frac{1}{3}}}$

Dialog (2) → $\Omega_1=\{MM;\ MW\}$ → $\underline{\underline{P(E)=\frac{1}{2}}}$

4. Frau Schmidt fährt oft mit dem Bus zum Einkaufen. Sie kümmert sich nicht um die Fahrpläne, da sie weiß, dass die Linien P und Q je sechsmal pro Stunde an ihrer Haltestelle abfahren und sie beide nutzen kann. Sie ist erstaunt, dass sie nur selten mit dem Q-Bus, sondern in 8 von 10 Fällen mit dem P-Bus fährt. Wie ist das möglich?

Lsg.: Linie P: 00 10 20 30 40 50 und Linie Q: 02 12 22 32 42

Ereignis P – sie fährt mit Linie P, Ereignis Q – sie fährt mit Linie Q



→ $P(P)=\frac{8}{10}$

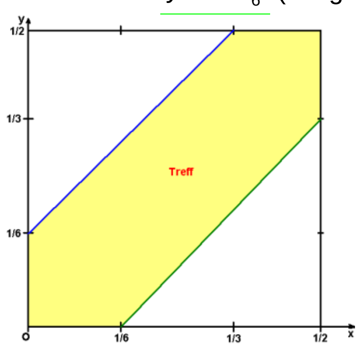
5. Ein Junge und ein Mädchen verabreden sich. Der Zeitpunkt ihres Eintreffens soll beiderseits rein zufällig zwischen 16:00 und 16:30 Uhr liegen.
a) Beide versprechen, dass sie 10 Minuten am Treffpunkt warten, wenn der Partner nicht dort sein sollte und erst dann wieder gehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden treffen?
b) Sachverhalt wie bei a), aber der Junge wartet jetzt 20 Minuten und das Mädchen wartet überhaupt nicht. Ändert sich die Wahrscheinlichkeit des Treffens gegenüber a) und wenn ja, wie?

Geg.: Ankunftszeit des Jungen: x mit $16\le x\le 16{,}5$ und Ankunftszeit des Mädchens: y mit $16\le y\le 16{,}5$

a) Bedingung für den Treff:

$|y-x|\le\frac{1}{6}$ → $y\le x+\frac{1}{6}$ (Junge trifft eher ein) oder

$y\ge x-\frac{1}{6}$ (Junge trifft später ein)

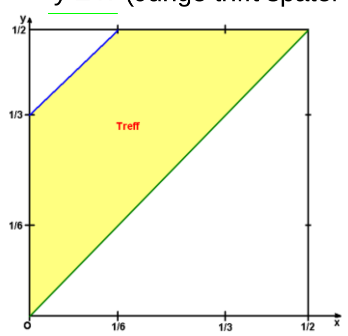


→ $P(T)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{9}\approx 0{,}556$

b) Bedingung für den Treff:

→ $y\le x+\frac{1}{3}$ (Junge trifft eher ein) oder

$y\ge x$ (Junge trifft später ein)



→ $P(T)=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{72}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}\approx 0{,}444$