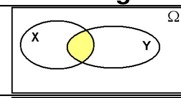
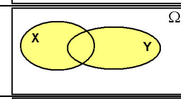
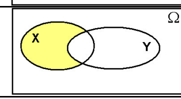
Bsp.: Aus einer Urne mit 20 Kugeln, die fortlaufend von 1 bis 20 nummeriert sind, wird eine Kugel gezogen.
Interessant ist dabei die Nummer der Kugel. → $\Omega = \{1; 2; 3;...19; 20\}$
Ereignis A – gezogene Kugel zeigt Quadratzahl → $A = \{1; 4; 9; 16\}$
Ereignis B – gezogene Kugel zeigt Zahl < 6 → $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Symbol	Erläuterung	VENN-Diagramm	Bsp.
$X \cap Y$ **geschnitten**	Ereignis X **und** Y tritt ein $\leftrightarrow$ sowohl X als auch Y treten ein		$A \cap B = \{1; 4\}$
$X \cup Y$ **vereinigt**	Ereignis X **oder** Y tritt ein $\leftrightarrow$ mindestens eines der beiden Ereignisse X,Y treten ein		$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 16\}$
$X \backslash Y$ **außer**	Ereignis X **außer** Y tritt ein $\leftrightarrow$ X tritt ein und nicht Y		$A \backslash B = \{9;16\}$

Regeln von de MORGAN: $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ bzw. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ (Beweis mittels VENN-Diagrammen)

Bsp.: $\overline{A \cap B} = \{2; 3; 5;6;...18; 19; 20\}$,
$\overline{A} = \{2; 3; 5; 6; 7; 8; 10;...15;17;...20\}$, $\overline{B} = \{6; 7; ...20\}$ → $\overline{A} \cup \overline{B} = \{2; 3; 5;6;...18; 19; 20\}$

Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsstheorie von KOLMOGOROW:

Definition: Eine Funktion P, die jeder Teilmenge A einer endlichen Ergebnismenge Ω eine reelle Zahl (P(A) zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn sie folgenden drei Bedingungen genügt:
Axiom 1 (Nichtnegativität): $P(A) \geq 0$
Axiom 2 (Normiertheit): $P(\Omega) = 1$
Axiom 3 (Additivität): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \varnothing$

Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung:
(1) $P(A) \leq 1$ (2) $P(\varnothing) = 0$ (3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Additionssatz
(5) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Anwendungen

Bsp. 1) Eine Anlage besteht aus den Bauteilen A und B. Aus der Erfahrung weiß man, dass das Bauteil A mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,0%, Bauteil B mit 10,0% und beide Bauteile gleichzeitig mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,2% ausfallen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichleit fällt A aus und B nicht?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A und B nicht ausfallen?
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass wenigstens eines der beiden Bauteile ausfällt?

geg.: Ereignis A – Bauteil A fällt aus → P(A)=7,0% bzw. Ereignis B – Bauteil B fällt aus → P(B)=10,0%
→ $P(A \cap B) = 2{,}2\%$

ges.: a) $P(A \cap \overline{B})$ b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ c) $P(A \cup B)$

Lsg. Mittels Vierfeldertafel: (Zerlegung von Ω) gegeben / gesucht / Zwischenergebnisse

	A	$\overline{A}$	
B	2,2%	7,8%	10,0%
$\overline{B}$	4,8%	85,2%	90,0%
	7,0%	93,0%	

a) $P(A \cap \overline{B}) = 4{,}8\%$
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 85{,}2\%$
c) $P(A \cup B) = 1 - 85{,}2\% = 14{,}8\%$

Bsp. 2) Eine FH bietet fakultative Kurse an in Mathe und Englisch. Aus der Statistik der letzten Jahre ist bekannt: A) 70% belegen mind. einen der beiden Kurse
B) 35% nehmen an Mathe teil aber nicht an Englisch
C) 90% belegen höchstens einen der beiden Kurse

a) Mit welcher Wahrscheinlichleit nimmt ein Student am Mathe-Kurs teil?
b) Mit welcher Wahrscheinlichleit nimmt ein Student am Englisch-Kurs teil?
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Student an keinem der beiden Kurse teilnimmt?
d) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Student entweder am Mathe- oder Englisch-Kurs teilnimmt?

geg.: Ereignis M – Teilnahme an Mathe bzw. Ereignis E –Teilnahme an Englisch

A) $P(M \cup E) = 70\%$ B) $P(M \cap \overline{E}) = 35\%$ C) $P(\overline{M \cap E}) = 90\%$

ges.: a) $P(M)$ b) $P(E)$ c) $P(\overline{M \cup E})$ d) $P(M \cup E \setminus M \cap E)$

Lsg. Mittels Vierfeldertafel: (Zerlegung von Ω) gegeben / gesucht / Zwischenergebnisse

A → $P(\overline{M \cup E}) = P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 30\%$

C → $P(M \cap E) = 10\%$

	M	$\overline{M}$	
E	10%	25%	35%
$\overline{E}$	35%	30%	65%
	45%	55%	

a) $P(M) = 45\%$
b) $P(E) = 35\%$
c) $P(\overline{M \cup E}) = 30\%$
d) $P(M \cup E \setminus M \cap E) = 25\% + 35\% = 60\%$

Unabhängigkeit von Ereignissen

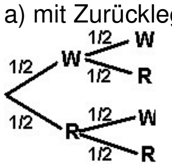
Spezieller Multiplikationssatz:
Zwei Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch **unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Bsp. 1) Ist mathematische Begabung von der Augenfarbe abhängig?
1000 Schüler getestet: 50 waren math. begabt, 143 waren blauäugig, 7 waren beides
→ $P(M) = 0{,}05$ $P(B) = 0{,}143$ → $P(M) \cdot P(B) = 0{,}00715$ $P(M \cap B) = 0{,}007$ → unabhängig

oder: $7/50 = 0{,}14 \approx 143/100 = 0{,}143$ bzw. $7/143 = 0{,}049 \approx 50/1000 = 0{,}05$

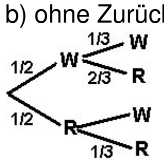
Bsp. 2) Einer Urne mit 2 weißen und 2 roten Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln entnommen.
Ereignis A – die erste gezogene Kugel ist weiß → A = {WW; WR}
Ereignis B – die zweite gezogene Kugel ist weiß → B = {WW; RW}
Sind die Ereignisse A und B stochastisch abhängig?

a) mit Zurücklegen:



P(A)=1/2 P(B)=1/2
$P(A \cap B) = 1/4$
→ **unabhängig**!

b) ohne Zurücklegen:



P(A)=1/2 P(B)=1/2
$P(A \cap B) = 1/6$
→ **abhängig**!

Bsp. 3) Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintritt, beträgt 40%, und dass beide Ereignisse eintreten 12%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) mindestens eines der beiden Ereignisse eintritt?
b) entweder Ereignis A oder Ereignis B eintritt?

geg.: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A) = 40\%$, $P(A \cap B) = 12\%$

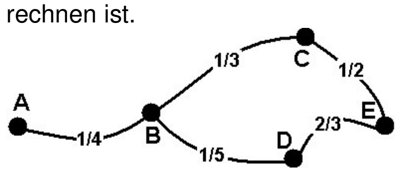
ges.: a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B})$

Lsg.: $P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{12}{40} = 30\%$

	A	$\overline{A}$	
B	12%	18%	30%
$\overline{B}$	28%	42%	70%
	40%	60%	

a) $P(A \cup B) = 1 - 42\% = \underline{\underline{58\%}}$
b) $P(\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}) = 18\% + 28\% = \underline{\underline{46\%}}$

Bsp. 4) Herr P. möchte mit dem Auto von A(stadt) nach E(dorf) fahren. Der aktuellen Stauvorwarnkarte ist zu entnehmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit auf den einzelnen Straßenabschnitten mit Stau zu rechnen ist.



Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, nicht in einen Stau zu geraten
a) über C(berg)
b) über D(thal)
c) insgesamt

Geg.: $P(S_{AB}) = 1/4$, $P(S_{BC}) = 1/3$, $P(S_{BC}) = 1/5$, $P(S_{CE}) = 1/2$, $P(S_{DE}) = 2/3$

Ges.: a) $P(\overline{S_{ACE}})$ b) $P(\overline{S_{ADE}})$ c) $P(\overline{S_{AE}})$

Lsg.: a) $P(\overline{S_{ACE}}) = P(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BC}} \cap \overline{S_{CE}}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \underline{\underline{25\%}}$

b) $P(\overline{S_{ADE}}) = P(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BD}} \cap \overline{S_{DE}}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = \underline{\underline{20\%}}$

c) $P(\overline{S_{AE}}) = P(\overline{S_{ACE}} \cup \overline{S_{ADE}}) = P\left(\left(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BC}} \cap \overline{S_{CE}}\right) \cup \left(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BD}} \cap \overline{S_{DE}}\right)\right)$

→ laut Additionssatz: $= P\left(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BC}} \cap \overline{S_{CE}}\right) + P\left(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BD}} \cap \overline{S_{DE}}\right) - P\left(\overline{S_{AB}} \cap \overline{S_{BC}} \cap \overline{S_{BD}} \cap \overline{S_{CE}} \cap \overline{S_{DE}}\right)$

→ laut Multiplikationssatz, da alle Ereignisse unabhängig sind:

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \underline{\underline{\frac{23}{60} \approx 38{,}3\%}}$$