Anzahlbestimmung bei Abzählproblemen

Produktregel (grundlegende Zählregel):
Aus k nicht leeren Mengen M_1, M_2, ..., M_k, mit n_1, n_2, ... n_k Elementen kann man $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ verschiedene k-Tupel (x_1; x_2; ... x_k) mit $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots x_k \in M_k$ bilden.

Bsp. 1) Ein Menü besteht aus Vorspeise, Hauptgericht und Nachspeise. Es stehen 2 verschiedene Vorspeisen, 4 Hauptgerichte und 3 Nachspeisen zur Auswahl.
Wie viele verschiedene Menüs lassen sich anbieten?

Lsg.: M_1 - Menge alle Vorspeisen, M_2 - Menge alle Hauptspeisen, M_3 - Menge alle Nachspeisen
$M_1 = \{v_1; v_2\}$ $M_2 = \{h_1; h_2; h_3; h_4\}$ $M_3 = \{n_1; n_2; n_3\}$
→ Menu = 3-Tupel, z.B.: $(v_1; h_3; n_3)$ → Es gibt $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ verschiedene Menüs.

Bsp. 2) Die Kennzeichnung von Nummernschildern hängt entscheidend von der Einwohnerzahl der entsprechenden Stadt bzw. Region ab. Dresden z.B. hat ca. 500.000 Einwohner. Die Dresdener Nummernschilder sind wie folgt aufgebaut: DD + zwei Buchstaben + 4 Ziffern. Bis zu welcher Einwohnerzahl wäre diese Kennzeichnung noch ausreichend?

Lsg.: $26^2 \cdot 10^4 = \underline{\underline{6.760.000}}$

Permutation: Jede mögliche Anordnung von n Elementen einer Menge, in der alle n Elemente verwendet werden

Bsp.: M={a; b; c} → alle Permutationen: abc, acb, bac, bca, cab, cba → 6 Permutationen

<u>Anzahl der Permutationen</u> von n Elementen = $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \underline{\mathbf{n!}}$ (lies *n Fakultät*)

Treten in n Elementen m Gruppen zu je p_1, p_2, ... p_m, gleichen Elementen auf, so ist die Gesamtzahl dieser Elemente: $\frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \ldots \cdot p_m!}$, mit $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$

Bsp.: Nehmen wir an, ein passionierter Skatspieler spielt täglich ca. 200 Spiele. Wäre es dann theoretisch möglich, dass er während seines ganzen Lebens (nehmen wir 100 Jahre an, denn Skatspieler werden bekanntlich alt) alle möglichen Skatspiele spielen kann? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lsg.: n=32 $p_1=10$ $p_2=10$ $p_3=10$ $p_4=2$

→ Anz. Spiele: $\frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!} = 2.753.294.408.504.640 \approx 2{,}7 \cdot 10^{15}$ (2 Trillionen 753 Billionen 294 Mrd ..)

→ Jahre: $\frac{2{,}7 \cdot 10^{15}}{200 \cdot 365{,}25} \approx \frac{27 \cdot 10^{14}}{7{,}3 \cdot 10^4} = 3{,}7 \cdot 10^{10} = 37\text{Mrd a}$

Auswahl (Ziehen) von k Elementen aus einer Menge von n Elementen

Bsp.: Menge M = {1; 2; 3} → n = 3, Auswahl von k = 2 Elementen

Variationen (geordnete Auswahl)		Kombinationen (ungeordnete Auswahl)
(1;1) (1;2) (1;3) (2;1) (2;2) (2;3) (3;1) (3;2) (3;3) $V_k^W(n) = n^k$ z.B.: $V_2^W(3) = 3^2 = 9$	**mit** Wiederholung (Zurücklegen)	(1;1) (1;2) (1;3) (2;2) (2;3) (3;3) $C_k^W(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$ z.B.: $C_2^W(3) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$
(1;2) (1;3) (2;1) (2;3) (3;1) (3;2) $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ z.B.: $V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$	**ohne** Wiederholung	(1;2) (1;3) (2;3) $C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ z.B.: $C_2(3) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Anwendungen

1) 10 Mannschaften spielen jeder gegen jeden mit Rückspiel. Wie viele Spiele sind das?

Lsg.: → geordnete Auswahl von k=2 aus n=10 Elementen ohne Wiederholung → $V_{10}(2) = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = \underline{\underline{90}}$

---

2) In der Blindenschrift werden durch die rechteckige Anordnung von sechs Punkten, die entweder erhaben sind oder als Löcher in Papier gedrückt werden, die Buchstaben, Ziffern und Satzzeichen dem Blinden fühlbar gemacht. Punkt oder Nicht-Punkt sind die zwei zu variierenden Elemente.
Wie viele verschiedene Zeichen kann man mit dieser Methode codieren.

Lsg.: → geordnete Auswahl von k=6 aus n=2 Elementen mit Wiederholung → $V_6^W(2) = 2^6 = \underline{\underline{64}}$

---

3) Aus den Ziffern 1 bis 9 wird zufällig eine vierstellige Zahl gebildet.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl nur aus unterschiedlichen Ziffern besteht?

Lsg.: Ereignis A – Zahl hat 4 verschiedene Ziffern aus {1; 2; ... 8; 9} → A = {1234; 1235; ... 9876}

→ geordnete Auswahl von k=4 aus n=9 Elementen ohne Wiederholung → $|A| = V_4(9) = \frac{9!}{5!} = 3024$

→ Ergebnismenge Ω ={1111; 1112; ... 9999} → $|\Omega| = 9^4 = 6561$

→ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3024}{6531} \approx \underline{\underline{46{,}1\%}}$

---

4) Zwei mal pro Woche jubelt es in vielen Wohnungen der Republik. 6 aus 49 ist zu einer Volkskrankheit geworden. Ein ungewöhnlich hoher Jackpot lässt die Anzahl der Glück Suchenden nochmals in die Höhe schnellen.
Wie viele unterschiedliche Tipps müsste man abgeben, damit man mit Sicherheit einen Sechser gewinnt?

Lsg.: → ungeordnete Auswahl von k=6 aus n=49 Elementen ohne Wiederholung

→ $V_6(49) = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \underline{\underline{13.983.816}}$

---

5) Ein Kleinkind spielt mit
a) den Buchstaben B, E, L, M, und U.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das es das Wort BLUME bildet?
b) den Buchstaben A, A, A, N, N und S.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das es das Wort ANANAS bildet?

Lsg. zu a) günstige Ereignisse 1 mögliche Ereignisse: 5! = 120

$P(\text{BLUME}) = \frac{1}{120} \approx \underline{\underline{0{,}83\%}}$

Lsg. zu b) günstige Ereignisse: $3! \cdot 2! \cdot 1 = 12$ mögliche Ereignisse: 6! = 720

$P(\text{BLUME}) = \frac{12}{720} \approx \underline{\underline{1{,}7\%}}$