Definition 1: Ein Zufallsversuch mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg bzw. Misserfolg) heißt Bernoulli-Versuch. (Jacob Bernoulli: 1654 – 1705)

Bsp.: Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 7 blauen und 3 weißen Kugeln.
Erfolgsereignis B – Ziehen einer blauen Kugel → P(B) = 0,7
Misserfolg $\overline{B}$ - Ziehen keiner blauen Kugel → $P(\overline{B}) = 0{,}3$

Definition 2: Wird ein Bernoulli-Versuch n mal wiederholt, so dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg q = p –1 nicht ändert, so spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Bsp.: Versuch wird 3 mal wiederholt (mit Zurücklegen!)
Ges.: P(„k Kugeln blau“), $k \in \{0;1;2;3\}$

k	mögl. Ergebnisse	Wahrscheinlichkeiten	P(„k Kugeln blau“)
0	$\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$	$0{,}3^3$	$1 \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3$
1	$B\,\overline{B}\,\overline{B}$	$0{,}7 \cdot 0{,}3^2$	$3 \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2$
	$\overline{B}\,B\,\overline{B}$	$0{,}7 \cdot 0{,}3^2$	
	$\overline{B}\,\overline{B}\,B$	$0{,}7 \cdot 0{,}3^2$	
2	$B\,B\,\overline{B}$	$0{,}7^2 \cdot 0{,}3$	$3 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1$
	$B\,\overline{B}\,B$	$0{,}7^2 \cdot 0{,}3$	
	$\overline{B}\,B\,B$	$0{,}7^2 \cdot 0{,}3$	
3	$\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$	$0{,}7^3$	$1 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0$

Satz: In einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p treten genau k Erfolge mit der Wahrscheinlichkeit $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ auf.

Anwendungen

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben von 25 Schülern einer Klasse
a) genau einer b) genau zwei c) höchstens zwei im Mai Geburtstag?
d) P(k) grafisch

Geg.: Erfolgsereignis E – ausgewählter Schüler hat im Mai Geburtstag → $P(E) = p = \frac{1}{12}$
Misserfolgsereignis $\overline{E}$ – ausgewählter Schüler hat nicht im Mai Geburtstag → $P(\overline{E}) = 1 - p = \frac{11}{12}$
n = 25

Ges.: a) k=1 → $P(k=1) = \binom{25}{1} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{24} \approx \underline{\underline{25{,}8\%}}$

b) k=2 → $P(k=2) = \binom{25}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{2} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{23} \approx \underline{\underline{28{,}2\%}}$

c) k=0 oder k=1 oder k=2 → $P(k \le 2) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2)$

$P(k=0) = \binom{25}{0} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{0} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{25} = \left(\frac{11}{12}\right)^{25} \approx \underline{11{,}4\%}$ → $P(k \le 2) \approx \underline{\underline{65\%}}$

d)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(k) in%	11,4	25,8	28,2	19,6	9,8	3,7	1,1	0,3	0,1	0,01

2) Ein Test bestehe aus 10 Fragen mit je 3 Antworten. Jeweils eine Antwort ist richtig. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 8 Fragen richtig beantwortet wurden.
Eine Testperson antwortet „Auf gut Glück“. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht sie den Test?

Geg.: Erfolgsereignis R – ausgewählte Antwort ist richtig → $P(R) = \frac{1}{3}$

Misserfolgsereignis $\overline{R}$ – ausgewählte Antwort ist falsch → $P(\overline{R}) = \frac{2}{3}$, n = 10

Lsg.: $P(|R| \geq 8) = P(|\overline{R}| \leq 2) = P(|\overline{R}| = 0) + P(|\overline{R}| = 2) + P(|\overline{R}| = 2)$ mit $p = \frac{2}{3}$

$$P(|\overline{R}| = 0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx \underline{1{,}69 \cdot 10^{-5}}$$

$$P(|\overline{R}| = 1) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} \approx \underline{3{,}39 \cdot 10^{-4}}$$

$$P(|\overline{R}| = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8} \approx \underline{3{,}05 \cdot 10^{-3}}$$

→ $P(|R| \geq 8) \approx \underline{\underline{3{,}4 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}34\%}}$