Abschlussprüfung an Fachoberschulen / Zusatzprüfung an Fachschulen zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2007 / 2008

Haupttermin: **04.06.2008**

Nach- bzw. Wiederholungstermin:

Fachrichtung: **Agrarwirtschaft, Technik, Fachschule - Fachbereich Technik**

Fach: **Mathematik (technisch)**

Prüfungsdauer: **210 Minuten**

Hilfsmittel:
- Tafelwerk bzw. Formelsammlung (ohne handschriftlichen Eintrag, ohne ausführliche Musterbeispiele, kein Wissensspeicher mit Beispiellösungen)
- grafikfähiger Taschenrechner ohne Computer – Algebra – System (ohne Handbuch)
- Zeichengeräte

Aufgabenschwerpunkte:			**BE**
Pflichtteil:	Aufgabe 1	Analysis	20
	Aufgabe 2	Vektorrechnung	20
	Aufgabe 3	Analysis / Vektorrechnung	10
		Wahrscheinlichkeitsrechnung	10
Wahlteil:	Aufgabe 4	Analysis	20
	Aufgabe 5	Analysis	20

Erreichbare Bewertungseinheiten: 80

Bemerkungen:

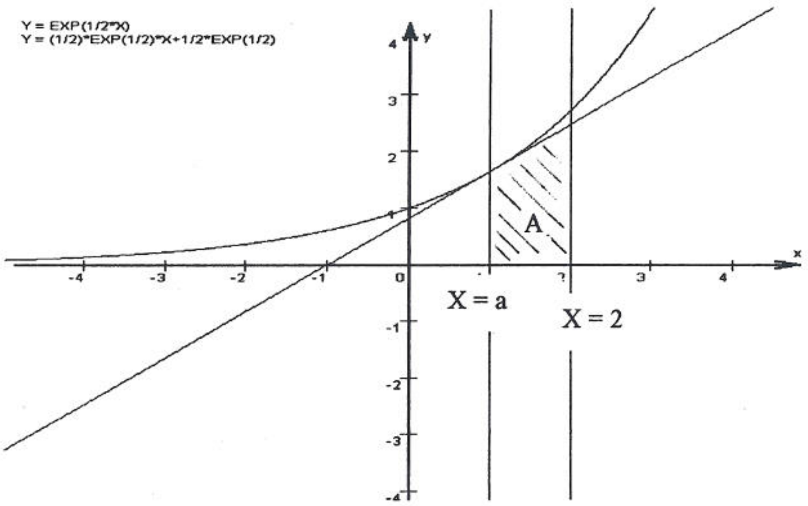
Die Schüler haben die drei Pflichtaufgaben und eine der zwei Wahlaufgaben zu lösen. Dabei muss durch den Schüler eindeutig gekennzeichnet werden, welche der Wahlaufgaben **nicht** bewertet werden soll, falls beide Wahlaufgaben bearbeitet werden.

Pflichtaufgabe 1	**BE**
Analysis	**20**
Gegeben sind die reellen Funktionen f_a: $f_a(x) = \frac{1}{a^2} x \cdot (ax^2 - x)$ und $g_a : g_a(x) = \frac{1}{a} x^3 - 1$, $a \in R$, $a \neq 0$. Die Graphen der Funktionen f_a und g_a werden mit H_a und G_a bezeichnet.	
1.1.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte von H_a mit den Koordinatenachsen.	2
1.1.2 Untersuchen Sie die Funktionen f_a rechnerisch auf relative Extremstellen und die Art der Extrema.	4
1.1.3 Eine dieser Funktionen f_a besitzt eine Nullstelle $x_0 = 2$. Berechnen Sie den Wert für a und geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an.	2
1.2.0 Für diese Teilaufgabe gilt $a = \frac{1}{2}$.	
1.2.1 Geben Sie die Nullstellen und die Koordinaten sowie die Art der relativen Extrempunkte von $f_{\frac{1}{2}}$ an.	2
1.2.2 Die Funktionen $f_{\frac{1}{2}}$ und $g_{\frac{1}{2}}$ schneiden sich im Punkt $P(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4})$. Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten im Punkt P an die Graphen $H_{\frac{1}{2}}$ und $G_{\frac{1}{2}}$. Diese beiden Tangenten bilden mit der y – Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.	5
1.2.3 Die Graphen $H_{\frac{1}{2}}$ und $G_{\frac{1}{2}}$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche unter Verwendung der Stammfunktion.	3
1.2.4 Es gibt Geraden x = b, die diesen Flächeninhalt (Aufg. 1.2.3) im Verhältnis 1 : 2 teilen. Ermitteln Sie einen Wert für b.	2

Pflichtaufgabe 2	**BE**
Vektorrechnung	**20**
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1;-2;1), B(3;-4;-2), C_k(-2k;1{,}5k;1)$ *mit* $k \in R$ *und* $D(-1;4;3)$ sowie die Ebene E: $6x+3y+2z=-6$ gegeben.	
2.1.0 Die Punkte A und B legen eine Gerade g fest.	
2.1.1 Geben Sie eine Geradengleichung für g an.	1
2.1.2 Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.	2
2.1.3 Berechnen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.	2
2.2.0 In dieser Teilaufgabe gilt $k=-2$. Die Punkte A, B, D und C_{-2} sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.	
2.2.1 Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABD.	2
2.2.2 Ermitteln Sie den Innenwinkel dieses Dreiecks ABD am Eckpunkt A.	2
2.2.3 Bestimmen Sie rechnerisch das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABDC_{-2}.	3
2.3.0 In dieser Teilaufgabe gilt $k \in R$. Die Ebene F_k wird durch die Punkte A, B und C_k bestimmt.	
2.3.1 Ermitteln Sie die Ebenengleichung F_k in Parameter- und Koordinatenform. (mögliches Ergebnis: $F_k: (4{,}5k+6)x+(6k+3)y+(-k+2)z=-8{,}5k+2$)	4
2.3.2 Berechnen Sie k so, dass der Punkt D in der Ebene F_k liegt.	2
2.3.3 Zeigen Sie, dass der Koordinatenursprung und der Punkt D für keinen Wert von k spiegelbildlich zu F_k liegen.	2

Pflichtaufgabe 3 (Blatt 1)	BE
Wahrscheinlichkeitsrechnung / Analysis / Vektorrechnung	**20**
3.1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A_a(1;3;-a)$, $B_a(a+5;5;-a+5)$ und die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.	
3.1.1 Die Geraden g_a verlaufen durch die Punkte A_a und B_a. Ermitteln Sie eine Gleichung für g_a .	1
3.1.2 Berechnen Sie den Wert a, für den die Gerade g_a die Gerade h schneidet und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.	4
3.2 Bestimmen Sie eine Lösung für folgendes Integral: $\int \frac{7x^3-3}{2\sqrt{x}}\,dx$	2
3.3 Berechnen Sie folgendes Integral unter Verwendung der Stammfunktion: (ohne GTR) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\cos(2x-\frac{\pi}{2})\,dx.$	3
3.4.0 Es wird mit 2 unterscheidbaren Würfeln gewürfelt.	
3.4.1 Es wird einmal mit beiden Würfeln gewürfelt. Geben Sie an, wie viele Versuchsausgänge möglich sind.	1
3.4.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Ereignisse bei einem Wurf beider Würfel: A: Es wird ein Pasch geworfen (beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl). B: Es wird die Augensumme 8 geworfen. C: Es wird eine Augensumme größer als 10 geworfen.	3
3.4.3 Es wird zweimal mit beiden Würfeln gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dabei zweimal die Augensumme 3 zu werfen.	1

Pflichtaufgabe 3 (Blatt 2)	BE
3.5.0 Im Training einer Fußballmannschaft wird auch das Elfmeterschießen trainiert. Dabei trifft Spieler A das Tor mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%, Spieler B mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% und Spieler C trifft das Tor mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%. Alle drei Spieler treten zu je einem Elfmeter an.	
3.5.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Ereignisse: E1: Alle drei Spieler treffen. E2: Keiner der Spieler trifft. E3: Es wird mindestens ein Treffer erzielt. E4: Es werden mindestens zwei Treffer erzielt.	5

Wahlaufgabe 1	**BE**
Analysis	**20**
4.1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f durch die Gleichung: $f(x) = 4x \cdot e^{-x^2} + 1$.	
4.1.1 Geben Sie den Definitionsbereich und die Koordinaten der Achsenschnittpunkte an.	2
4.1.2 Weisen Sie nach, dass $f'(x) = 4 \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$ die 1. Ableitung der Funktion f ist und berechnen Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extrempunkte von f.	5
4.1.3 Fertigen Sie eine Skizze der Funktion im Intervall $[-3;3]$ an.	1
4.1.4 Die Parabel $h(x) = 5x^2 - 2x - 2$ und die Funktion f schließen eine Fläche vollständig ein. Ergänzen Sie die Skizze mit h(x) und kennzeichnen Sie die Fläche. Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes.	3
4.2.0 Gegeben ist die Funktion g durch die Gleichung: $g(x) = e^x$. Der Graph der Funktion g wird mit G bezeichnet. Die Geraden x = a (0 < a < 2), x = 2 und die Tangente t an G an der Stelle x = a sowie die x – Achse begrenzen ein Trapez (siehe Skizze). 	
4.2.1 Zeigen Sie, dass die Gerade $y = e^a(x + 1 - a)$ die Tangente t an G an der Stelle x = a ist.	3
4.2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes in Abhängigkeit des Parameters a (mögliches Teilergebnis: $A = e^a(4 - 3a + 0{,}5a^2)$).	3
4.2.3 Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Flächeninhalt des Trapezes maximal wird (auf den Nachweis des Maximums kann verzichtet werden).	3

Wahlaufgabe 2	**BE**
Analysis	**20**
Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : f_a(x) = \frac{6-x^2}{x^2+a}$; $a \in R, a \geq 0$. Die Graphen der Funktionen f_a werden mit G_a bezeichnet.	
5.1.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt a = 5.	
5.1.1 Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_5, die Achsenschnittpunkte sowie die Gleichung der waagerechten Asymptote an.	4
5.1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f_5 symmetrisch ist und geben Sie die Art der Symmetrie an.	2
5.1.3 Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art des relativen Extrempunktes sowie die Koordinaten der Wendepunkte (ohne Nachweis der Wendepunkte).	5
5.1.4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 2.Grades $h(x)$ verläuft durch den Punkt $A(0;0{,}5)$ und schneidet G_5 in den Punkten $P(1;f_5(1))$ und $Q(-1;f_5(-1))$. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Funktion $h(x)$. Der Graph der Funktion h und G_5 begrenzen eine Fläche vollständig. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.	4
5.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt $a \in R, a \geq 0$.	
5.2.1 Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a an der Stelle x = 1 den Anstieg $m = \frac{-2(6+a)}{(1+a)^2}$ haben.	2
5.2.2 Ermitteln Sie rechnerisch, für welches a die Tangente an G_a im Punkt $R(1;f_a(1))$ die x – Achse unter einem Winkel von $\alpha = 135°$ schneidet.	3