Mathe 7 – Grundwissen – **Lösen von linearen Gleichungen**

1. Begriffe

Gleichung:
Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.
Bsp.: 1) $12\cdot(x-1)=7-5x$ 2) $2a+4b=3\cdot(a-5)$ 3) $|3x|=-1{,}5$ 4) $3x^2-4x+5=0$ 5) $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$
Man unterscheidet Gleichungen nach
a) der Anzahl der vorkommenden Variablen oder
b) der höchsten Potenz der Variablen

Lineare Gleichung:
Eine lineare Gleichung enthält genau eine Variable, die nur linear (also in der 1. Potenz) vorkommt. Das heißt, nur die Beispiele 1 und 3 sind lineare Gleichungen.

Lösung einer Gleichung mit einer Variablen:
Setzt man für die Variable eine Zahl ein, so erhält man entweder eine falsche oder eine wahre Aussage. Diejenige Zahl, die die Gleichung zu einer wahren Aussage macht, nennt man Lösung der Gleichung.

Lösungsmenge einer Gleichung mit einer Variablen:
Alle Lösungen bilden die Lösungsmenge. Sie wird mit L bezeichnet. Alle Zahlen, die Lösung sind, werden durch ein Semikolon (;) getrennt - möglichst der Größe nach sortiert - in geschweifte Klammern geschrieben. Bsp.: $L=\{-1{,}5;2\}$
Enthält die Lösungsmenge keine Zahl, so spricht man von der leeren Menge. $L=\{\}$
Ein weiterer Spezialfall ist die Lösungsmenge, die alle Zahlen des Grundbereiches enthält. Man schreibt z. B. $L=\mathbb{Q}$, wenn alle rationalen Zahlen die Gleichung zu einer wahren Aussage machen.

Zueinander äquivalente Gleichungen:
Gleichungen, die die gleiche Lösungsmenge besitzen, heißen zueinander äquivalent.
Bsp.: $2x-1=5$, $2x=6$, $x=3$

2. Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen

Ziel des Lösens einer Gleichung ist, alle Zahlen zu finden, die Lösung der Gleichung sind, sie also zu einer wahren Aussage machen.
Einfache Gleichungen wie z. B. $2x-1=5$ wird man sicher inhaltlich lösen, d. h. man überlegt sich, dass dann $2x=6$ und damit $x=3$ sein muss.
Wie ist das aber, wenn die Gleichung komplizierter aufgebaut ist, wie z. B. $5\cdot(x-3)=13x-6$? Hier versagt das inhaltliche Lösen. Solche Gleichungen kann man nur durch schrittweises Umformen zu äquivalenten Gleichungen bis hin zur Gleichung $x=...$ lösen, was im Folgenden am Beispiel näher erläutert wird.
Doch vorher muss man noch wissen, wie man zu einer äquivalenten Gleichung gelangt.

Erlaubt sind folgende Umformungen:
- Addition/Subtraktion eines beliebigen Termes
- Multiplikation mit einer beliebigen rationalen Zahl außer mit 0
- Division durch eine beliebige rat. Zahl außer durch 0

Wichtig ist, dass man die Umformung immer auf beiden Seiten der Gleichung vornehmen muss. Dazu kann man sich die Gleichung als Balkenwaage vorstellen. Auch die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Seiten das Gleiche geschieht.

3. Lösen der Gleichung $5\cdot(x-3)=13x-6$

Zunächst bieten sich zwei sinnvolle Umformungen an:

I) Division durch 5, damit im linken Term die Klammer wegfällt
Dies hätte aber zur Folge, dass man im rechten Term Brüche erhält: $x-3=\frac{13}{5}x-\frac{6}{5}$

II) Ausmultiplizieren des linken Termes: $5x-15=13x-6$

Aus dem Bauch heraus, würde ich mich für Variante II entscheiden.

Mit dem Ziel $x=\ldots$ vor Augen stört auf der rechten Seite der Summand $13x$. Man muss also $13x$ subtrahieren und das natürlich auch auf der linken Seite, damit man eine äquivalente Gleichung erhält:

$5x-15=13x-6 \quad | -13x$

Mit dem senkrechten Strich macht man deutlich, dass die Umformung auf beiden Seiten vorzunehmen ist.

Nach dem Zusammenfassen von $5x-13x=-8x$ auf der linken Seite erhält man die äquivalente Gleichung $-8x-15=-6$.

Man erkennt, dass auf der linken Seite der Summand -15 stört. Um ihn zu beseitigen, muss man also 15 addieren. Also:

$-8x-15=-6 \quad | +15$

Nach dem Zusammenfassen auf der rechten Seite erhält man die äquivalente Gleichung $-8x=9$ und sind damit unserem Ziel $x=\ldots$ schon sehr nahe gekommen. Wir müssen nur noch durch -8 teilen:

$-8x=9 \quad | :(-8)$

$\underline{x=-\frac{9}{8}}$

Damit haben wir die vermutliche Lösung $-\frac{9}{8}$ gefunden.

Probe:

$$5\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)-15=13\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)-6$$

$$-\frac{45}{8}-\frac{120}{8}=-\frac{117}{8}-\frac{48}{8}$$

$$\underline{-\frac{165}{8}=-\frac{165}{8}} \quad \text{w. A.}$$

$$\underline{\underline{L=\left\{-\frac{9}{8}\right\}}}$$